УДК 303.732.4

08.00.13 Математические и инструментальные методы экономики (экономические науки)

СУЩЕСТВОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ В ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Орлов Александр Иванович
д.э.н., д.т.н., к.ф.-м.н., профессор
РИНЦ SPIN-код: 4342-4994
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, prof-orlov@mail.ru

Динамическое программирование предназначено для решения дискретных задач оптимального управления. Согласно этому методу оптимальное решение в многомерной задаче находят путем ее декомпозиции на этапы, каждый из которых представляет подзадачу относительно одной переменной. В экономических задачах число этапов - это горизонт планирования. Выбор горизонта планирования необходим для строгой постановки прикладной задачи в области экономики и управления, но его зачастую трудно обосновать. Мы видим выход в использовании асимптотически оптимальных планов, для которых значения критерия оптимизации мало отличается от его значений для оптимальных планов при всех достаточно больших горизонтах планирования. Основной результат статьи - существование асимптотически оптимального плана. Доказательство проводится в нескольких постановках. В случае стремления к 0 хвоста суммы максимумов переходных функций существование асимптотически оптимального плана получено в теореме 1. Частным случаем являются модели с дисконтированием при коэффициенте дисконтирования, меньшем 1. Основная часть статьи посвящена моделям с коэффициентом дисконтирования, равном 1. Теорема 2 о магистрали доказана для базового множества из конечного числа элементов. В теореме 3 получено утверждение об аппроксимации произвольного множества конечным. В заключительной теореме 4 существование асимптотически оптимального плана доказано в общем случае. Термин "магистраль" ассоциируется с известной рекомендацией водителям: чтобы попасть из пункта А в пункт Б, целесообразно на начальном участке пути выехать на магистраль, двигаться по ней, а на заключительном участке съехать с магистрали и добраться до пункта Б. Аналогична рекомендация по выбору оптимальной траектории при использовании принципа максимума Понтрягина в модели оптимального распределения

UDC 303.732.4

Mathematical and instrumental methods of Economics

EXISTENCE OF ASYMPTOTICALLY OPTIMAL PLANS IN DISCRETE PROBLEMS OF DYNAMIC PROGRAMMING

Orlov Alexander Ivanovich
Dr.Sci.Econ., Dr.Sci.Tech., Cand.Phys-Math.Sci., professor
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Dynamic programming is designed to solve discrete optimal control problems. According to this method, the optimal solution in a multidimensional problem is found by decomposing it into stages, each of which represents a subproblem with respect to one variable. In economic problems, the number of stages is the planning horizon. The choice of a planning horizon is necessary for a rigorous statement of the applied problem in the field of economics and management, but it is often difficult to justify. We see a way out in the use of asymptotically optimal plans for which the values of the optimization criterion differ little from its values for optimal plans for all sufficiently large planning horizons. The main result of the paper is the existence of an asymptotically optimal plan. The proof is carried out in several statements. If the sum of the maximums of the transition functions tends to 0, the existence of an asymptotically optimal plan is obtained in Theorem 1. A special case is models with a discount at a discount coefficient less than 1. The main part of the article is devoted to models with a discount coefficient equal to 1. Theorem 2 on the highway is proved for base set of a finite number of elements. In Theorem 3, a statement is obtained on the approximation of an arbitrary set by a finite one. In the final Theorem 4, the existence of an asymptotically optimal plan is proved in the general case. The term “magistral” is associated with a well-known recommendation to drivers: in order to get from point A to point B, it is advisable to go to the highway (magistral) at the initial section of the road, and then exit the highway and get to point B. The recommendation for choosing the optimal one is similar trajectories using the Pontryagin maximum principle in the model of the optimal distribution of time between obtaining knowledge and developing skills. This fact underlines the methodological proximity of dynamic programming and the Pontryagin maximum principle времени между получением знаний и развитием умений. Этот факт подчеркивает методологическую близость динамического программирования и принципа максимума Понтрягина

Ключевые слова: ЭКОНОМИКА, МАТЕМАТИКА, ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОПТИМИЗАЦИЯ, ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ, ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ, ТЕОРЕМЫ О МАГИСТРАЛИ

Keywords: ECONOMICS, MATHEMATICS, ECONOMIC-MATHEMATICAL MODELS, OPTIMIZATION, DYNAMIC PROGRAMMING, ASYMPTOTICALLY OPTIMAL PLANS, EXISTENCE THEOREMS, MAGISTRAL THEOREMS

DOI: http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-155-012

1. Введение

Динамическое программирование – метод решения дискретных задач оптимального управления. Этот метод предложен американским математиком Ричардом Беллманом (1920 - 1984) в середине XX в. [1]. Согласно нему оптимальное решение в многомерной задаче находят путем ее декомпозиции на этапы, каждый из которых представляет подзадачу относительно одной переменной. Преимущество такого подхода состоит в том, что вместо многомерной задачи на каждом этапе решаются одномерные оптимизационные задачи. С идейной точки зрения динамическое программирование близко к принципу максимума Л.С. Понтрягина (1908 - 1988).

Приведем основные формулировки.

Пусть даны множества $A,\ K \subseteq A^2$ и функции $f_j : K \to R^1,\ \ j = 1,2,...,m$. Во многих прикладных областях рассматривается следующая задача дискретного динамического программирования:

$$F_m(x_0, x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{1 \le j \le m} f_j(x_{j-1}, x_j) \to \min, \tag{1}$$

$$(x_{j-1}, x_j) \in K,\ \ j = 1,2,...,m. \tag{2}$$

Во многих экономико-математических постановках m - это горизонт планирования. С помощью динамического программирования задачи с этапами m сводятся к задачам с (m - 1) этапами, а путем итерации - к одномерным задачам.

В частности, модель управления запасами, рассмотренная в [2], приводит к специальному частному случаю задачи (1) - (2). Сведение моделей экономического роста типа Неймана-Гейла к задаче (1) - (2) с $f_i \equiv f$ указано И.В. Романовским [3].

Выбор горизонта планирования m, с одной стороны, необходим для строгой постановки прикладной задачи в области экономики и управления, но, с другой стороны, его зачастую трудно обосновать. Мы видим выход в использовании асимптотически оптимальных планов, для которых значения критерия оптимизации мало отличается от его значений для оптимальных планов при всех достаточно больших горизонтах планирования. Приведем строгую формулировку основного результата настоящей статьи.

Основная теорема. Пусть B - компакт, f - положительная непрерывная функция на B^2,

$$\alpha_m = \inf\{f(x_0, x_1) + ... + f(x_{m-1}, x_m),\ x_i \in B,\ i = 0,1,...,m\}.$$

Тогда существует асимптотически оптимальный план, т.е. существует бесконечная последовательность $\{y_i \in B,\ i = 0,1,2,...\}$ такая, что

$$\limsup_{m\to\infty} \alpha_m^{-1}(f(y_0, y_1) + ... + f(y_{m-1}, y_m)) = 1.$$

Некоторые свойства оптимальных планов исследуются в настоящей статье в случае, когда множество B конечно.

2. Модели с дисконтированием

Широко предлагаются, исследуются и применяются экономико-математические модели, приводящие к следующему частному случаю задачи (1) - (2):

$$F_m^{(\alpha)}(x_0, x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{1\le j\le m} \alpha^{j-1} f(x_{j-1}, x_j) \to \min, \qquad (3)$$

$$(x_{j-1}, x_j) \in K, \;\; j = 1,2,...,m\,. \qquad (4)$$

Модели (3) - (4) - это так называемые модели с дисконтированием ($\alpha > 0$ - дисконт-фактор).

Естественно попытаться выяснить, какими "внутренними" свойствами выделяются задачи (3) - (4) из всех задач вида (1) - (2). Оказывается, эти свойства формулируются в терминах устойчивости упорядоченности планов.

Планом на k шагов назовем последовательность $X = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ такую, что $(x_{j-1}, x_j) \in K, \;\; j = 1,2,...,k$. Введем отношение порядка $R(t, k)$ между планами на k шагов при реализации с момента t. Именно, будем считать, что план $X_1 = (x_1^1, x_2^1,..., x_k^1)$ лучше плана $X_2 = (x_1^2, x_2^2,..., x_k^2)$, и писать $X_1R(t, k)X_2$, если

$$f_t(x_0^1, x_1^1) + f_{t+1}(x_1^1, x_2^1) + ... + f_{t+k-1}(x_{k-1}^1, x_k^1) < f_t(x_0^2, x_1^2) + f_{t+1}(x_1^2, x_2^2) + ... + f_{t+k-1}(x_{k-1}^2, x_k^2)\,. \qquad (5)$$

Характеризация моделей с дисконтированием. Пусть в задаче (1) - (2) упорядоченность планов на 1 и 2 шага не зависит от момента начала реализации, т.е.

$$R(1, 1) = R(2, 1) = ... = R(m, 1), \qquad (6)$$

$$R(1, 2) = R(2, 2) = ... = R(m - 1, 2). \qquad (7)$$

Пусть выполнены некоторые условия регулярности. Тогда существуют константы $\alpha > 0$ и d_j, $j = 2, 3, ..., m$, такие, что

$$f_j(x, y) = \alpha^{j-1} f_1(x, y) + d_j,\; j = 2,3,...,m\,. \qquad (8)$$

Указанная характеризация впервые получена автором в 1974 г. [4] при некоторых условиях регулярности, довольно сложно формулируемых. Эти условия ослаблены нами в [5], а затем Э.Л. Пресманом и А.Д. Сластниковым в [6]. Доработанный вариант теоремы о характеризации с полным доказательством опубликован в [7].

В настоящей статье изучаем устойчивость решений задач (1) - (2) и (3) - (4) к изменению горизонта планирования m.

3. Асимптотически оптимальные планы

В дальнейшем предполагается, что множество A - компакт. Тогда по теореме Тихонова (см., например, [8, с.194]) множества A^n, $n = 2,3,...$, являются компактами в топологии произведения. Пусть K - замкнутое подмножество A^2, причем такое, что область определения F_m из (1) не пуста. Предполагаем также, что $f_i(x,y)$ - непрерывные положительные функции на K. Тогда, как легко видеть, F_m является непрерывной функцией на компакте, а потому решение задачи (1) - (2) существует. Назовем его m-оптимальным планом. Простые примеры [9, 10] показывают, что при изменении m элементы m-оптимальных планов, стоящие на определенном месте, могут существенно меняться. Вместе с тем в экономических приложениях выбор горизонта планирования m зачастую не является хорошо обоснованным.

Определение 1. Бесконечную последовательность $Y = (y_0, y_1, y_2, ...)$ такую, что $(y_i, y_{i+1}) \in K$ при всех i = 0, 1, 2, ..., назовем асимптотически оптимальным планом, если планы из первых (m + 1) ее элементов, т.е. $Y(m) = (y_0, y_1, y_2, ..., y_m)$, дают асимптотически те же затраты, что и m-оптимальные планы $X_0(m)$, а именно

$$\lim_{m\to\infty} \frac{F_m(Y(m))}{F_m(X_0(m))} = 1. \qquad (9)$$

В силу (9) асимптотически нормальный план можно рекомендовать к использованию в случае неопределенности в выборе горизонта планирования m, т.е. прежде всего при невозможности обосновать выбор тоги или иного m.

Существуют и другие определения асимптотически оптимальных планов. Мы не будем сейчас сравнивать достоинства и недостатки различных определений.

Теорема 1. Пусть $K = A^2$ и при $m \to \infty$

$$\delta(m) = \sum_{j>m} \sup_{K} f_j(x, y) \to 0 . \qquad (10)$$

Тогда существует асимптотически оптимальный план.

Доказательство. Рассмотрим A^∞ - произведение счетного числа пространств *A*. По теореме Тихонова A^∞ - компакт. В силу (10) на A^∞ определена функция

$$F_\infty(x_0, x_1, x_2, ..., x_m, ...) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x_{j-1}, x_j) . \qquad (11)$$

Ввиду непрерывности f_j и (10) функция F_∞ непрерывна на A^∞ (в топологии произведения). Значит, F_∞ достигает минимума на A^∞ в некоторой точке $Y = (y_0, y_1, y_2, ..., y_m, ...)$. Тогда Y - асимптотически оптимальный план. Действительно, пусть $X_0^\infty(m)$ - произвольный элемент A^∞, проекция которого на A^∞ есть $X_0(m)$. Тогда

$$F_m(Y(m)) < F_\infty(Y) \le F_\infty(X_0^\infty(m)) \le F_\infty(X_0(m)) + \delta(m) , \qquad (12)$$

откуда с учетом (10) и положительности f_j и следует (9). Теорема 1 доказана.

Условие (10) выполнено для задачи (3) - (4) при $\alpha < 1$, а потому при $K = A^2$ в модели с дисконтированием существует асимптотически оптимальный план. В случае $K = A^2$ и $\alpha > 1$ существует последовательность $Y = (y_0, y_1, y_2, ...)$ элементов A такая, что

$$\lim_{m \to \infty} \frac{F_m^{(\alpha)}(y_m, y_{m-1}, y_{m-2}, ..., y_2, y_1, y_0)}{F_m(X_0(m))} = 1 . \qquad (13)$$

Оставшаяся часть статьи посвящена задаче (3) - (4) при $\alpha = 1$. Существование асимптотически оптимального плана анонсировано в [11], его свойства рассмотрены в [12], но доказательства основных результатов впервые публикуются здесь. С других точек зрения эту модель изучали И.В. Романовский (см. [3], [9]), А.И. Абакумов А. И. и Т.А. Пидюра [13] и другие авторы. Речь идет о моделях Неймана - Гейла, являющихся важной составляющей математической теории экономической динамики и равновесия [14, 15].

4. Теорема о магистрали для конечного множества

Рассмотрим сначала случай, когда A, а потому и K, состоит из конечного числа элементов. Общий случай будет изучаться с помощью дискретных аппроксимаций.

Определение 2. Циклом назовем такую последовательность $C = (x_1, x_2, \dots , x_{n+1})$ элементов А, что $(x_j, x_{j+1}) \in K$ при $j = 1, 2, \dots , n$, в начале и в конце стоит один и тот же элемент $x_1 = x_{n+1}$, а все остальные элементы (они имеются при $n > 1$) различны между собой и не совпадают с x_1.

Введем обозначение:

$$f(C) = f(x_1, x_2) + f(x_2, x_3) + \dots + f(x_n, x_{n+1}). \qquad (14)$$

Предполагаем, что существует хотя бы один цикл. Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы область определения $F_m^{(1)}$ была непустой при любом m. В дальнейшем вместо $F_m^{(1)}$ пишем F_m.

Минимальными циклами называются те, на которых $f(C)/n$ достигает минимума по множеству всех циклов. Существование минимальных циклом очевидно в силу конечности множества всех циклов с элементами из конечного множества.

Теорема 2 (теорема о магистрали). При любом $m > m_0$ существует минимальный цикл B_m такой, что в одном из m-оптимальных планов, начиная с некоторого элемента x_p и кончая некоторым x_{m-k} , повторяется цикл B_m, причем p и k не превосходят константы, зависящей только от числа элементов A, а $m_0 = m_0(f)$.

Примеры показывают, что цикл B_m может с необходимостью меняться при изменении m. Этот цикл и является той "магистралью", о которой идет речь в названии теоремы. Оно объясняется связью с математической экономикой, прослеженной, например, в [2].

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится ряд лемм.

Лемма 1. Пусть $X(m)$ - произвольный план. Тогда существует некоторое количество циклов C_j, j = 1, 2, ... , r, и элементов $y_i \in A, i = 1,2,...,q$, таких, что $(y_i, y_{i+1}) \in K$ и

$$F_m(X(m)) = \sum_{1\le j\le r} f(C_j) + \sum_{1\le i\le q-1} f(y_i, y_{i+1}), \qquad (15)$$

причем q не превосходит числа элементов A.

Доказательство проведем по индукции. Утверждение очевидно для $m \le |A|$ - 1, где $|A|$ - число элементов конечного множества A. Для остальных m по принципу Дирихле[1] найдутся целые неотрицательные числа $\alpha, \beta, \alpha < \beta$, такие, что $x_\alpha = x_\beta$. Из всех таких пар возьмем ту, для которой $\beta - \alpha$ минимально. Тогда $C_1 = (x_\alpha, x_{\alpha+1}, ..., x_\beta)$ - цикл. Рассмотрим план $X_1 = (x_{0,...,} x_\alpha, x_{\beta+1}, ..., x_m)$, полученный из $X(m)$ "вырезанием" цикла C_1. Для X_1 выполнено предположение индукции, а потому оно выполнено и для $X(m)$, поскольку

$$F_m(X(m)) = F_{m-\beta+\alpha}(X_1) + f(C_1). \qquad (16)$$

Лемма 1 доказана.

Элементы некоторых циклов, указанных в правой части (15), идут в плане $X(m)$ подряд (например, цикл C_1 в доказательстве леммы 1), но другие циклы могут быть "разорваны", т.е. в них "вклеены" участки, "вырезанные" при описанном в доказательстве леммы 1 построении (15).

Лемма 2. Для любого плана $X(m)$ на m шагов существует план $Y(m)$ с тем же значением F_m, в котором число "разорванных" циклов не превосходит константы, зависящей только от $|A|$.

---

[1] Принципом Дирихле называется следующее утверждение: "Если в t ящиках лежит более чем t вещей, то в каком-то ящике лежит не менее двух вещей" [16].

Доказательство. Опишем процесс "переклейки" планов. Ясно, что значения F_m, соответствующие планам $(\ldots , a, x, b, \ldots , c, x, d, \ldots , e, x, f, \ldots)$ и $(\ldots , a, x, d, \ldots , e, x, b, \ldots , c, x, f, \ldots)$, равны между собой. Значит, "кусок" плана $(x, d, \ldots , e, x)$ можно "переклеить" в любое место, где есть элемент x, и при этом издержки F_m не изменятся. Рассмотрим описанный при доказательстве леммы 1 процесс построения представления (15) в обратном порядке. Начнем с "основы" $(y_1, y_2, \ldots , y_q)$, в которую последовательно будем "вклеивать" циклы. Будем "приклеивать" циклы к элементам основы, а не разрывать ранее "приклеенные". Когда нам не удастся "приклеить" очередной цикл без разрыва предыдущих? Только тогда, когда он начинается с элемента, которого нет в "основе". В этом случае включим элементы цикла, который нам придется разорвать, в основу (и тогда в "основе" некоторые элементы могут повторяться). Так нам придется сделать не более $|A|$ раз. В результате в конце процесса получим "основу" не более чем из $|A|^2$ элементов, в которую "вклеены" циклы, причем среди циклов нет разорванных. Значение F_m для построенного нами плана $Y(m)$ совпадает с $F_m(X(m))$. Лемма 2 доказана. Отметим, что все одинаковые циклы, "приклеенные" к одному и тому же элементу A, можно поместить в плане $Y(m)$ подряд.

Лемма 3. Существует m_0, зависящее от f, такое, что при $m > m_0$ план, построенный в соответствии с леммой 2 по m-оптимальному плану, содержит минимальный цикл, не являющийся "разорванным".

Доказательство. План $Y(m)$, построенный в соответствии с леммой 2 по m-оптимальному плану, сам является m-оптимальным. Как показано в той же лемме, существует константа $\gamma = \gamma(|A|)$ такая, что не менее $m - \gamma$ элементов $Y(m)$ входят в циклы, не являющиеся "разорванными". Предположим, что ни один из этих циклов не является минимальным. Пусть $f(C)/n = \delta$ для минимального цикла C и

$$\varepsilon = \min\left(\frac{f(C_1)}{n_1} - \frac{f(C)}{n}\right), \tag{17}$$

где минимум берется по всем циклам C_1, не являющимся минимальными. Имеем

$$F_m(Y(m)) \geq (\delta + \varepsilon)(m - \gamma) + \gamma \inf f\ . \tag{18}$$

Рассмотрим теперь план $Y_1(m)$, состоящий в периодическом повторении минимального цикла. Тогда

$$F_m(Y_1(m)) \leq (m - |A|)\delta + |A| \sup f\ . \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что при

$$m > m_0(f) = \frac{1}{\varepsilon}\left((\delta + \varepsilon)\gamma - |A|\delta + |A| \sup f - \gamma \inf f\right) \tag{20}$$

справедливо неравенство

$$F_m(Y_1(m)) < F_m(Y(m)). \tag{21}$$

Получено противоречие, доказывающее лемму 3.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Применим описанный в лемме 2 процесс в случае m-оптимального плана. Пусть циклы C_1, C_2, ... , C_p входят в преобразованный план t_1, t_2, ... , t_p раз соответственно. Пусть длины циклов равны n_1, n_2, ... , n_p и r_i есть остаток от деления t_i на произведение $n_1 n_2 ... n_p$. Ясно, что можно перейти к другому плану, заменив t_i - r_i циклов C_i на соответствующее число циклов C_j , каково бы ни было j. В соответствии с леммой 3 при $m > m_0(f)$ среди циклов C_1, C_2, ... , C_p имеется минимальный. Положим

$$\beta = \sum_{1 \leq i \leq p} (t_i - r_i) n_i\ . \tag{22}$$

Передадим β идущих подряд элементов m-оптимального плана "во владение" минимальному циклу. (Отметим, что поскольку исходный план является m-оптимальным, то те циклы, для которых $t_i - r_i \neq 0$, также являются минимальными, ибо описанное выше преобразование не должно уменьшать F_m). Нетрудно показать, что $m - \beta$ не превосходит константы, зависящей только от |A|, чем и завершается доказательство теоремы 2.

Среди m-оптимальных планов могут быть и такие, в которых многократно повторяется переход с одного минимального цикла на другой, поэтому утверждение теоремы 2 имеет место не для всех m-оптимальных планов, а лишь для некоторых. Соответствующие примеры содержатся в статьях [9, 10].

Следствие. Пусть множество A состоит из конечного числа элементов и есть хотя бы один цикл. Тогда существует асимптотически оптимальный периодический план.

Таковым является любой план, полученный периодическим повторением минимального цикла.

5. Теорема о магистрали (общий случай)

Для обобщения результатов предыдущего раздела на общий случай понадобится утверждение об аппроксимации (в определенном ниже смысле) произвольного множества конечным.

Теорема 3. Пусть $K = A^2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное подмножество $A(\varepsilon) = \{x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, ..., x_{n(\varepsilon)}^\varepsilon\} \subseteq A$ такое, что для любого плана $X(m)$ можно указать план $X_\varepsilon(m)$ с элементами из $A(\varepsilon)$, для которого

$$\frac{1}{m}\left|F_m(X(m)) - F_m(X_\varepsilon(m))\right| < \varepsilon\,. \tag{23}$$

Утверждения типа теоремы 3 хорошо известны специалистам. Однако автору не удалось подобрать нужную ссылку (в литературных источниках рассматривались лишь различные частные случаи).

Доказательство. Для каждой точки $(x, y) \in K$ рассмотрим множество

$$U(x, y) = \left\{(x', y') : |\, f(x', y') - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{24}$$

Оно является открытым, а потому по теореме Уоллеса [8, с.193] существуют открытые подмножества $V(x)$ и $V(y)$ множества A такие, что

$x \in V(x), y \in V(y), V(x) \times V(y) \subseteq U(x,y)$. Из компактности *K* следует, что покрытие *K* открытыми множествами $V(x) \times V(y)$ содержит открытое подпокрытие $V(x_i) \times V(y_i), i = 1,2,...,k.$. Рассмотрим множества

$$\bigcap_{1 \le i \le k} W(x_i), \tag{25}$$

где $W(x_i)$ - это $V(x_i)$ или дополнение $V(x_i)$. Обозначим непустые из множеств (25) T_{1x}, T_{2x}, ... , T_{gx}. Пересечение любых двух из этих множеств пусто, их объединение есть *A*. Аналогично построим T_{1y}, T_{2y}, ... , T_{py}. Тогда *K* есть сумма всех $T_{ix} \times T_{jy}$. Из принадлежности точек (x', y') и (x'', y'') одному и тому же $T_{ix} \times T_{jy}$ вытекает, что

$$| f(x',y') - f(x'',y'') | < \varepsilon \tag{26}$$

Рассмотрим множества $T_{ix} \cap T_{jy}$, $i = 1,2,...,g$, $j = 1,2,...,p$. Непустые из них обозначим $T_1, T_2, ..., T_{n(\varepsilon)}$, где $n(\varepsilon) \le 2^{2k}$. Тогда каждое $T_{ix} \times T_{jy}$. состоит из некоторого числа множеств $T_\alpha \times T_\beta$. План построим следующим образом. Выберем в каждом T_α произвольную точку $x(\alpha)$. Получим $A(\varepsilon)$. Если элемент x_i плана $X(m)$ входит в T_α, то положим $x_{\varepsilon i} = x(\alpha)$. Тогда для плана $X_\varepsilon(m) = (x_{\varepsilon 0}, x_{\varepsilon 1}, ..., x_{\varepsilon m})$ выполняется (23) в силу (26). Теорема 3 доказана.

Следствие. Для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечная периодическая последовательность *Y* элементов *A* такая, что

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{F_m(Y(m))}{F_m(X_0(m))} < 1 + \varepsilon . \tag{27}$$

Доказательство. Пусть δ определяется из условия $\delta \inf f = \varepsilon$, а $A(\delta)$ - множество, котором идет речь в теореме 3. Рассмотрим вспомогательную модель, порожденную сужением *f* на $A(\delta) \times A(\delta)$. В соответствии с теоремой 3 и (23) плану $X_0(m)$ соответствует некоторый план $X_\delta(m)$ во вспомогательной модели, причем

$$\frac{F_m(X_\delta(m))}{F_m(X_0(m))} < 1 + \varepsilon . \tag{28}$$

В силу следствия из теоремы 2 во вспомогательной модели существует асимптотически оптимальный периодический план Y_δ. Из (28) следует, что для Y_δ выполнено (27). Следствие доказано.

Теорема 4. Пусть $K = A^2$. Тогда существует асимптотически оптимальный план.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{Y_k\}$ существующих в силу следствия из теоремы 3 периодических бесконечных планов, для которых выполнено (27) при $\varepsilon = 2^{-k}, k = 1,2,...$. Сконструируем с их помощью асимптотически оптимальный план Y.

Пусть план Y_k порожден циклом C_k, длина которого равна n_k, а средние затраты $f(C_k)/n_k = p_k$, $k = 1, 2, ...$ Без ограничения общности можно считать, что p_k образуют строго убывающую последовательность. Рассмотрим план Y, устроенный следующим образом: сначала некоторое число раз повторяется цикл C_1, потом, с некоторого момента $m(1)$, начинается движение по циклу C_2, а с момента $m(2)$ - по циклу C_3, и т.д., с момента $m(j)$ прекращается движение по C_j и начинается по C_{j+1}. При этом между $m(j)$ и $m(j+1)$ укладывается целое число циклов C_{j+1}. Переход от движения по одному циклу к движению по другому возможен в силу $K = A^2$. Мы покажем, что можно выбрать $m(1)$, $m(2)$, ... , $m(k)$, ... так, чтобы

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{F_m(Y(m))}{F_m(Y_k(m))} < 1 \qquad (29)$$

для любого k = 1, 2, ... В силу определения Y_k из (29) следует, что Y является асимптотически оптимальным планом.

Пусть k фиксировано. Будем сравнивать $F_m(Y(m))$ и $F_m(Y_k(m))$ при $m > m(k)$. Введем обозначения. Пусть $s = s(m)$ - такое натуральное число, что $m(s) \leq m < m(s+1)$, и q - остаток от деления $m - m(s) - 1$ на n_{s+1}. Пусть $M = \sup f$. Как легко видеть, $F_m(Y(m))$ представляется в следующем виде:

$F_m(Y(m)) = F_{m(k)-1}(Y(m(k) - 1)) + f(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) + (m(k + 1) - m(k) - 1)p_{k+1} +$

$+ f(x_{m(k+1)-1}, x_{m(k+1)}) + (m(k+2) - m(k+1) - 1)p_{k+2} + \ldots + (m(s) - m(s-1) - 1)p_s +$

$$+ f(x_{m(s)-1}, x_{m(s)}) + (m - m(s) - 1 - q)p_{s+1} + f(x_{m-q}, x_{m-q+1}) + \ldots + f(x_{m-1}, x_m). \quad (30)$$

Оценим слагаемые в правой части (30) следующим образом:

$$F_{m(k)-1}(Y(m(k) - 1)) < M\,(m(k) - 1), \quad (31)$$

$$\sum_{k \le i \le s} f(x_{m(i)-1}, x_{m(i)}) \le M(s - k + 1). \quad (32)$$

В силу строгого убывания p_i

$$\left(\sum_{k \le i \le s-1} (m(i+1) - m(i) - 1)\,p_{i+1}\right) + (m - m(s) - 1 - q)\,p_{s+1} \le p_{k+1}(m - q - (s - k) - 1). \quad (33)$$

Наконец,

$$f(x_{m-q}, x_{m-q+1}) + \ldots + f(x_{m-1}, x_m) \le M\,q. \quad (34)$$

Поскольку $q < n_{s+1}$, то, собирая оценки (31) - (34) вместе, получим

$$F_m(Y(m)) < p_{k+1}\,(m - n_{s+1} - (s - k) - 1) + M\,(m(k) + s - k + n_{s+1}) <$$

$$< p_{k+1}\,m + M\,(m(k) + s - k + n_{s+1}). \quad (35)$$

Поскольку

$$F_m(Y_k(m)) > (m - n_k)p_k, \quad (36)$$

то из (35) и (36) вытекает оценка

$$\frac{F_m(Y(m))}{F_m(Y_k(m))} < \frac{p_{k+1}m + M(m(k) - s - k + n_{s+1})}{p_k(m - n_k)} = \\ = \frac{p_{k+1}}{p_k} + \frac{p_{k+1}n_k + M(m(k) - k) + M(s + n_{s+1})}{p_k(m - n_k)} \quad (37)$$

Ясно, что $s + n_{s+1}$ растет вместе с m. Пусть эта величина растет достаточно медленно, тогда из (37) следует (29). Из оценки (37) следует, что достаточно выбрать последовательность $m(1)$, $m(2)$, ... так, чтобы

$$\lim_{m \to \infty} \frac{s(m) + n_{s(m)+1}}{m} = 0. \quad (38)$$

Ясно, что можно последовательно выбирать значения $m(i)$ так, чтобы выполнялось (38). Теорема 4 доказана.

Замечание 1. В настоящей работе сознательно опущено обсуждение экономического содержания полученных результатов (см. [3 - 5], [9 - 11], [13 - 15]), а также их места в столь развитой ныне области, как математические модели и методы в экономике. Отметим, что результаты настоящей статьи, равно как и вообще динамическое программирование, могут быть применены не только в экономике, а, скажем, и в медицине.

Замечание 2. Термин "магистраль" ассоциируется с известной рекомендацией водителям: чтобы попасть из пункта А в пункт Б, целесообразно на начальном участке пути из пункта А выехать на магистраль (основной маршрут, главное направление, широкую и прямую дорогу для скоростного движения), двигаться по магистрали, а на заключительном участке съехать с магистрали и добраться до пункта Б. Точно такими же словами можно описать рекомендацию по выбору оптимальной траектории при использовании принципа максимума Понтрягина в модели, рассмотренной в статье [17]. Этот факт подчеркивает методологическую близость динамического программирования и принципа максимума Понтрягина.

Литература

1. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. - 401 с.
2. Орлов А.И., Пейсахович Э.Э. Некоторые модели планирования оптимальных размеров поставок и начального запаса // Экономика и математические методы. 1975. Т.11. №4. С.681-694.
3. Романовский И.В. Асимптотическое поведение дискретного детерминированного процесса с непрерывным множеством состояний // Оптимальное планирование. Вып. 8. - Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1967. - С.171-183.
4. Орлов А.И. Проблемы устойчивости в некоторых моделях управления запасами и ресурсами // Алгоритмы многомерного статистического анализа и их применения. - М.: ЦЭМИ АН СССР, 1975. - С. 95-105.
5. Orlov A. Sur la stabilite' dans les modeles economiques discrets et les modeles de gestion des stocks // Publications Econometriques. 1977. Vol. X. F. 2. Pp.63-81.
6. Пресман Э.Л., Сластников А.Д. Характеризация одной модели динамического программирования // Вероятностные модели и управление экономическими процессами.- М. : ЦЭМИ АН СССР. 1978. - С. 169-182.
7. Орлов А.И. Характеризация моделей с дисконтированием / А.И. Орлов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2019. – №09(153). С. 202 – 218. – IDA [article ID]: 1531909022. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2019/09/pdf/22.pdf
8. Келли Дж.Л. Общая топология. - М.: Наука, 1968. - – 384 с.

9. Романовский И.В. Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом динамического программирования // Кибернетика. 1967. №2. С. 71-83.
10. Орлов А.И. Предельные теоремы в некоторых моделях управления запасами // Управление сложными системами. - М.: Наука, 1975. - С. 42-47.
11. Орлов А.И. О некоторых моделях управления запасами // Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях. - М.: Наука, 1974. - С. 381-384.
12. Орлов А.И. Существование асимптотически оптимальных планов в дискретных задачах динамического программирования // Многомерный статистический анализ (математическое обеспечение). - М.: Изд-во ЦЭМИ АН СССР, 1979. - С. 201-213.
13. Абакумов А. И., Пидюра Т. А. Магистральные характеристики матричных моделей экономической динамики // Известия Дальневосточного федерального университета. Экономика и управление. 2010. №2 (54). С. 96-103.
14. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973. - 336 с.
15. Левин М.И., Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математические модели экономического взаимодействия. М.: - Наука, 1993. - 373 с.
16. Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л. Внеклассная работа по математике в 6-8 классах. Изд. 2-е, исправл. и дополн. - М.: Просвещение, 1984. - 288 с.
17. Орлов А.И. Методология моделирования процессов управления в социально-экономических системах / А.И. Орлов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №07(101). С. 166 – 196. – IDA [article ID]: 1011407011. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/07/pdf/11.pdf

References

1. Bellman R. Dinamicheskoe programmirovanie. — M.: Izd-vo inostrannoj literatury, 1960. - 401 s.
2. Orlov A.I., Pejsahovich E.E. Nekotorye modeli planirovaniya optimal'nyh razmerov postavok i nachal'nogo zapasa // Ekonomika i matematicheskie metody. 1975. T.11. №4. S.681-694.
3. Romanovskij I.V. Asimptoticheskoe povedenie diskretnogo determinirovannogo processa s nepreryvnym mnozhestvom sostoyanij // Optimal'noe planirovanie. Vyp. 8. - Novosibirsk: Nauka (Sibirskoe otdelenie), 1967. - S.171-183.
4. Orlov A.I. Problemy ustojchivosti v nekotoryh modelyah upravleniya zapasami i resursami // Algoritmy mnogomernogo statisticheskogo analiza i ih primeneniya. - M.: CEMI AN SSSR, 1975. - S. 95-105.
5. Orlov A. Sur la stabilite' dans les modeles economiques discrets et les modeles de gestion des stocks // Publications Econometriques. 1977. Vol. X. F. 2. Pp.63-81.
6. Presman E.L., Slastnikov A.D. Harakterizaciya odnoj modeli dinamicheskogo programmirovaniya // Veroyatnostnye modeli i upravlenie ekonomicheskimi processami.- M. : CEMI AN SSSR. 1978. - S. 169-182.
7. Orlov A.I. Harakterizaciya modelej s diskontirovaniem / A.I. Orlov // Politematicheskij setevoj elektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Elektronnyj resurs]. – Krasnodar:

KubGAU, 2019. – №09(153). S. 202 – 218. – IDA [article ID]: 1531909022. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2019/09/pdf/22.pdf

8. Kelli Dzh.L. Obshchaya topologiya. - M.: Nauka, 1968. - – 384 s.
9. Romanovskij I.V. Optimizaciya stacionarnogo upravleniya diskretnym determinirovannym processom dinamicheskogo programmirovaniya // Kibernetika. 1967. №2. S. 71-83.
10. Orlov A.I. Predel'nye teoremy v nekotoryh modelyah upravleniya zapasami // Upravlenie slozhnymi sistemami. - M.: Nauka, 1975. - S. 42-47.
11. Orlov A.I. O nekotoryh modelyah upravleniya zapasami // Mnogomernyj statisticheskij analiz v social'no-ekonomicheskih issledovaniyah. - M.: Nauka, 1974. - S. 381-384.
12. Orlov A.I. Sushchestvovanie asimptoticheski optimal'nyh planov v diskretnyh zadachah dinamicheskogo programmirovaniya // Mnogomernyj statisticheskij analiz (matematicheskoe obespechenie). - M.: Izd-vo CEMI AN SSSR, 1979. - S. 201-213.
13. Abakumov A. I., Pidyura T. A. Magistral'nye harakteristiki matrichnyh modelej ekonomicheskoj dinamiki // Izvestiya Dal'nevostochnogo federal'nogo universiteta. Ekonomika i upravlenie. 2010. №2 (54). S. 96-103.
14. Makarov V.L., Rubinov A.M. Matematicheskaya teoriya ekonomicheskoj dinamiki i ravnovesiya. - M.: Nauka, 1973. - 336 s.
15. Levin M.I., Makarov V.L., Rubinov A.M. Matematicheskie modeli ekonomicheskogo vzaimodejstviya. M.: - Nauka, 1993. - 373 s.
16. Gusev V.A., Orlov A.I., Rozental' A.L. Vneklassnaya rabota po matematike v 6-8 klassah. Izd. 2-e, ispravl. i dopoln. - M.: Prosveshchenie, 1984. - 288 s.
17. Orlov A.I. Metodologiya modelirovaniya processov upravleniya v social'no-ekonomicheskih sistemah / A.I. Orlov // Politematicheskij setevoj elektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Elektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №07(101). S. 166 – 196. – IDA [article ID]: 1011407011. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/07/pdf/11.pdf