УДК 681.5.033.23

05.00.00 Технические науки

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОБЛАСТЕЙ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ТРЕБУЕМОЕ КАЧЕСТВО ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Пугачев Василий Иванович
к.т.н., доцент

Пиотровский Дмитрий Леонидович
д.т.н., профессор, заведующий кафедрой автоматизации производственных процессов
ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», Краснодар, Россия

В статье рассмотрены вопросы определения области параметров управляющего устройства, обеспечивающих устойчивую работу замкнутой системы. Показано решение задачи с использованием расширенной амплитудно-фазовой характеристики. Предложенный метод поиска области устойчивости параметров управляющего устройства проще классических методов и позволяет в общем виде находить условия устойчивости, а не проверять систему на устойчивость при заданных параметрах

Ключевые слова: КАЧЕСТВО ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА, РАСШИРЕННАЯ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА, ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ

UDC 681.5.033.23

Technical sciences

THE UNIVERSAL METHOD OF CALCULATING THE RANGES OF PARAMETERS OF THE CONTROL DEVICE, PROVIDING THE REQUIRED QUALITY OF THE TRANSITION PROCESS

Pugachev Vasiliy Ivanovich
Cand.Tech.Sci., assistant professor.

Piotrovskiy Dmitriy Leonidovich
Dr.Sci.Tech., professor
Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

The article considers the problems of determining the settings area of the control device, which ensure stable operation of the closed system. It shows the solution to the problem using the enhanced amplitude-phase characteristics. The proposed method of finding the domain of stability of parameters of the control device is more simple than classical methods and allows, in general, to find conditions for the stability, not to test the system for stability under given parameters

Keywords: QUALITY OF TRANSITION PROCESS, ENHANCED AMPLITUDE-PHASE CHARACTERISTIC, STABILITY RANGE

Внедрение систем автоматического управления связано с необходимостью знать область параметров управляющего устройства, обеспечивающую устойчивую работу замкнутой системы. Существующие методы расчета [1] даже области устойчивости весьма сложны при степенях характеристического уравнения выше 5.Значительно проще решить поставленную задачу с использованием расширенной амплитудно-фазовой характеристики (РАФХ) [2].

Границе устойчивости соответствует относительная степень затухания ψ, равная нулю. При этом показатель колебательности m:

$$m = \frac{-\ln(1-\psi)}{2\cdot\pi}, \qquad (1)$$

Для обеспечения требуемой относительной степени затухания необходимо, чтобы расширенная амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы проходила через точку на комплексной плоскости с координатами (-1,i0).

Введем обозначения:

$W_r(p) = K_p + \frac{1}{T_i \cdot p}$ - передаточная функция регулятора с независимыми параметрами настройки.

$W_{ob}(p) = \frac{1}{W_o(p)}$ - обратная передаточная функция объекта,

$W_{ob}(i,w) = Re(W_{ob}(i,w)) + i \cdot Im(W_{ob}(i,w))$ - обратная расширенная амплитудно-фазовая характеристика объекта

Требуемой относительной степени затухания соответствует равенство:

$$W_r(iw) \cdot W_o(i,w) = -1, \text{ или}$$

$$-K_p - \frac{1}{T_i \cdot (i-m)w} = Re(W_{ob}(iw)) + i \cdot Im(W_{ob}(iw)). \quad (2)$$

Приравняв в этом уравнении вещественные и мнимые части, находим искомые значения для K_p и T_i:

$$K_p = m \cdot Im(W_{ob}(i,w)) - Re(W_{ob}(i,w)). \quad (3)$$

$$T_i = \frac{1}{w \cdot (m^2 + 1) \cdot Im(W_{ob}(i,w))}. \quad (4)$$

В случае ПИД − закона управления следует задаваться отношением постоянной дифференцирования к постоянной времени интегрирования:

$$\alpha = \frac{T_d}{T_i}(0 \div 0.5).$$

$$Wr(p) = \frac{Ti \cdot Td \cdot p^2 + Kp \cdot Ti \cdot p + 1}{Ti \cdot p},\qquad (5)$$

Проведем переобозначения:

$$Co = \frac{1}{Ti},\quad C1 = Kp,\quad C2 = Td,\quad \frac{Td}{Ti} = \alpha,\quad C2 = \frac{\alpha}{Co},$$

$$B(p) = -Co - C1 \cdot p - \frac{\alpha}{Co} \cdot p^2,\qquad p = (i - m) \cdot w.$$

$$B(i,w) = -Co - C1 \cdot (i - m) \cdot w - \frac{\alpha}{Co} \cdot (i - m)^2 \cdot w^2.$$

$$B(i,w) = (i - m) \cdot Wob(i,w).\qquad (6)$$

$$Re(B(i,w)) = -Co + C1 \cdot w \cdot m + \frac{1}{Co} \cdot \alpha \cdot w^2 - \frac{1}{Co} \cdot \alpha \cdot w^2 \cdot m^2.$$

$$Im(B(i,w)) = w \cdot \frac{-C1 \cdot Co + 2 \cdot \alpha \cdot m \cdot w}{Co}.$$

Приравнивая мнимые части равенства (6), получаем:

$$C1 = m \cdot Im(Wob(i,w)) - Re(Wob(i,w)) + 2 \cdot \alpha \cdot m \cdot \frac{w}{Co}.$$

Приравнивая вещественные части равенства (6), и подставив значение C1 получаем:

$$-Co^2 + \left(m^2 + 1\right) \cdot w \cdot Im(Wob(i,w)) \cdot Co + \alpha \cdot w\left(m^2 + 1\right) \cdot w.$$

Обозначим: $k(w) = w \cdot \left(m^2 + 1\right)$, тогда

$$Co^2 - k(w) \cdot Im(Wob(i,w)) \cdot Co - \alpha \cdot k(w) \cdot w = 0 \quad . \qquad (7)$$

Решив это уравнение, находим:

$$Co = 0.5 \cdot \left(k(w) \cdot Im(Wob(i,w)) + \sqrt{k(w)^2 \cdot Im(Wob(i,w))^2 + 4 \cdot k(w) \cdot w \cdot \alpha} \right).$$

Поскольку Ti = 1/ Co, то

$$Ti(w) = \frac{1}{0.5 \cdot \left(k(w) \cdot Im(Wob(i,w)) + \sqrt{k(w)^2 \cdot Im(Wob(i,w))^2 + 4 \cdot k(w) \cdot w \cdot \alpha} \right)} . \qquad (8)$$

$$Kp(w) = m \cdot Im(Wo(i,w)) - Re(Wo(i,w)) + 2 \cdot m \cdot w \cdot \alpha \cdot Ti. \qquad (9)$$

Практика показывает, что большинство объектов управления с саморегулированием можно аппроксимировать с погрешностью не выше 5 % дифференциальным уравнением второго порядка с чистым запаздыванием. Посмотрим на конкретном примере результаты поиска области устойчивости с использованием критерия устойчивости Гурвица.

Пусть передаточная функция объекта имеет вид:

$$Wo(p) = \frac{Ko \cdot e^{-p \cdot \tau}}{T2 \cdot p^2 + T1 \cdot p + 1}.$$

Для определенности примем:

$Ko = 2$, $T2 = 2$, $T1 = 3$. $$Wo(p) = \frac{e^{-\tau \cdot p} \cdot 2}{2 \cdot p^2 + 3 \cdot p + 1}.$$

Разложим передаточную функцию звена чистого запаздывания в ряд Тейлора:

$$e^{-\tau \cdot p} = \frac{1}{0.5 \cdot \tau^2 \cdot p^2 + \tau \cdot p + 1} . \qquad (10)$$

С учетом разложения (10), передаточная функция объекта принимает вид:

$$Wo(p,\tau) = \frac{2}{1.0 \cdot p^4 \cdot \tau^2 + \left(2. \cdot \tau + 1.5 \cdot \tau^2\right) \cdot p^3 + \left(2. + 3. \cdot \tau + .5 \cdot \tau^2\right) \cdot p^2 + (3. + \tau) \cdot p + 1}.$$

Примем $\tau = 0{,}5$. Тогда

$$Wo(p) = \frac{2}{.250 \cdot p^4 + 1.375 \cdot p^3 + 3.625 \cdot p^2 + 3.5 \cdot p + 1}. \qquad (11)$$

Будем искать область устойчивых параметров управляющего устройства с независимыми параметрами, реализующее пропорционально-интегральный закон управления с передаточной функцией

$$Wr(p) = Kp + \frac{1}{Ti \cdot p}, \qquad (12)$$

где Kp – коэффициент усиления управляющего устройства,

Ti – постоянная времени интегрирования.

Передаточная функция замкнутой системы между заданным значением и истинным регулируемой величины имеет вид:

$$Wz(p) = \frac{Wo(p) \cdot Wr(p)}{1 + Wo(p) \cdot Wr(p)}. \qquad (13)$$

Подставив значения передаточных функций объекта (3) и управляющего устройства (4) в выражение (5), получаем:

$$Wz(p) = \frac{(2. \cdot Kp \cdot Ti \cdot p + 2.)}{\left(b_0 \cdot p^5 + b_1 \cdot p^4 + b_2 \cdot p^3 + b_3 \cdot p^2 + b_4 \cdot p + b_5\right)}, \qquad (14)$$

где:

$$b_0 = Ti \cdot \tau^2, \qquad b_1 = 2. \cdot Ti \cdot \tau + 1.500 \cdot Ti \cdot \tau^2,$$

$$b_2 = 3. \cdot Ti \cdot \tau + .5000 \cdot Ti \cdot \tau^2 + 2. \cdot Ti \qquad b_3 = Ti \cdot \tau + 3. \cdot Ti,$$

$b_4 = Ti + 2. \cdot Kp \cdot Ti$, $b_5 = 2$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$b_0 \cdot p^5 + b_1 \cdot p^4 + b_2 \cdot p^3 + b_3 \cdot p^2 + b_4 \cdot p + b_5 = 0. \quad (15)$$

По критерию Гурвица для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы главные диагональные миноры до 4 порядка были положительны.

$\Delta1(Kp, Ti) = b_1$, $\Delta1(Kp, Ti) \to 1.37500 \cdot Ti$,

$\Delta2(Kp, Ti) = 4.109 \cdot Ti^2$,

$\Delta3(Kp, Ti) = 12.5 \cdot Ti^3 - 3.78 \cdot Kp \cdot Ti^3 + .688 \cdot Ti^2$.

После упрощения:

$\Delta3(Kp, Ti) = 12.5 \cdot Ti - 3.78 \cdot Kp \cdot Ti + .688$

$\Delta4(Kp, Ti) = 12.5 \cdot Ti^4 + 21.2 \cdot Kp \cdot Ti^4 - 28.4 \cdot Ti^3 - 7.56 \cdot Kp^2 \cdot Ti^4 + 2.75 \cdot Kp \cdot Ti^3 - .250 \cdot Ti^2$.

Решив уравнения (7) и (8) относительно Kp, получаем:

$$Kp1(Ti) = \frac{3.31 \cdot Ti + .182}{Ti}$$

$$Kp2(Ti) = \frac{.1819 + 1.402 \cdot Ti + .6614e\text{-}3 \cdot \left(25. - .7422e7 \cdot Ti + .8274e7 \cdot Ti^2\right)^{\frac{1}{2}}}{Ti}$$

$$Kp3(Ti) = \frac{.1819 + 1.402 \cdot Ti - .6614e\text{-}3 \cdot \left(25. - .7422e7 \cdot Ti + .8274e7 \cdot Ti^2\right)^{\frac{1}{2}}}{Ti}.$$

Построив все кривые на одном графике, найдем область устойчивости. Устойчивая область заштрихована.

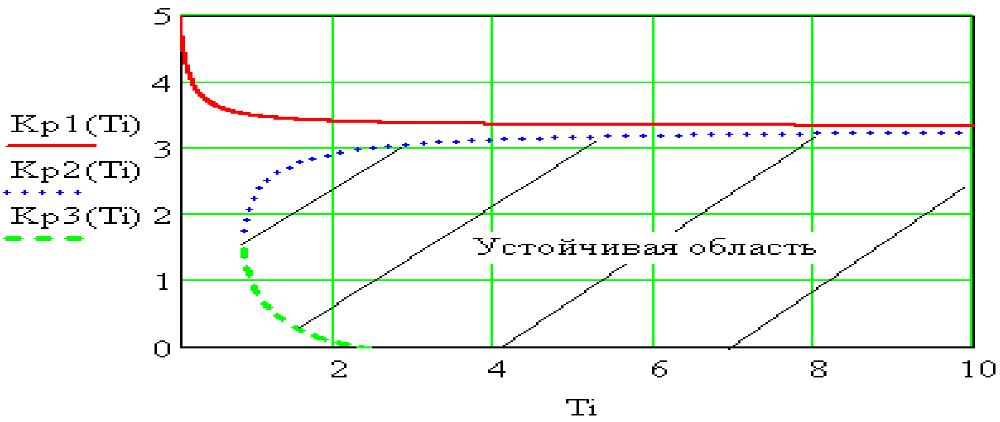

Рисунок 1 – Графики уравнений границ устойчивости

Значительно проще решить поставленную задачу с использованием расширенной амплитудно-фазовой характеристики (РАФХ) [2].

Границе устойчивости соответствует относительная степень затухания, равная нулю.

$$Wo(p) = 2 \cdot \frac{e^{(-.5)\cdot p}}{2 \cdot p^2 + 3 \cdot p + 1}. \qquad Wob(p) = \frac{1}{Wo(p)}$$

,

$$Wob(i,w) = e^{.5000 \cdot w \cdot i} \cdot w^2 \cdot i^2 + 1.500 \cdot e^{.5000 \cdot w \cdot i} \cdot w \cdot i + .5000 \cdot e^{.5000 \cdot w \cdot i}.$$

$$Ti(w) = \frac{1}{0.5 \cdot \left(k(w) \cdot Im(Wob(i,w)) + \sqrt{k(w)^2 \cdot Im(Wob(i,w))^2 + 4 \cdot k(w) \cdot w \cdot \alpha}\right)}.$$

$$Kp = m \cdot Im(Wo(i \cdot w)) - Re(Wo(i \cdot w)) + 2 \cdot m \cdot w \cdot \alpha \cdot Ti.$$

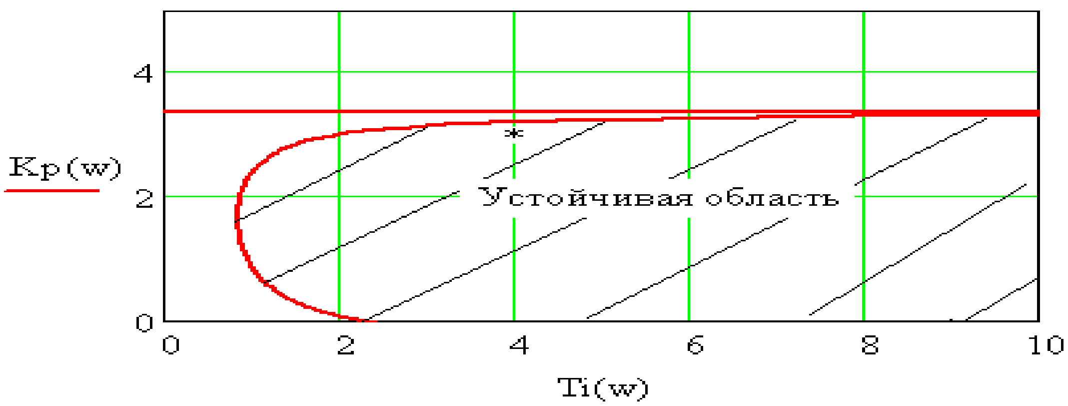

Рисунок 2 – График области устойчивости

Предложенный метод позволяет находить области, обеспечивающие относительную степень затухания не ниже заданной. В частности, для $\psi = 0{,}99$ получим область апериодической устойчивости.

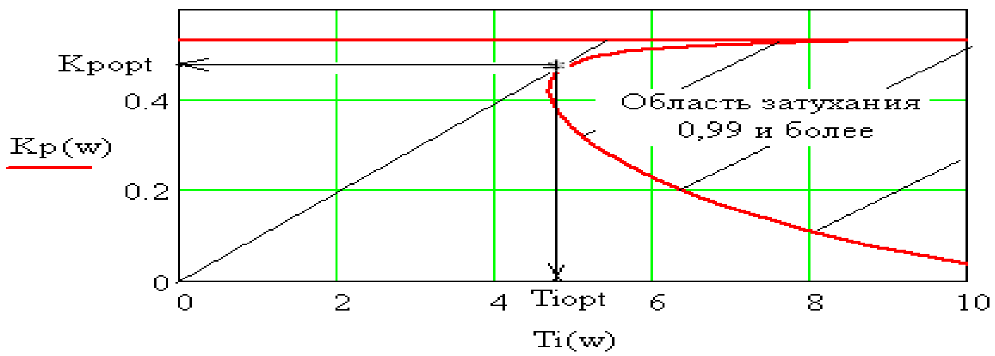

Рисунок 3 – Графики области относительной степени затухания $\psi = 0{,}99$

В системах стабилизации заданное значение регулируемой величины остается постоянным. Система управления должна фильтровать внешние возмущающие воздействия.

Наилучшими фильтрующими свойствами случайных воздействий обладает система управления, управляющее устройство которой имеет наибольшее отношение Kp/Ti. Полученные области качества позволяют выбрать параметры управляющего воздействия с наибольшим отношением Kp/Ti, как это показано на рисунке 3.

Проверим правильность предлагаемых рекомендаций.

$Kp1 = 3$, $Ti1 = 4$, $Kp2 = 0{,}46$ $Ti2 = 4{,}8$..

$$Wo(p) = 2 \cdot \frac{e^{(-.5) \cdot p}}{2 \cdot p^2 + 3 \cdot p + 1}$$

$$Wr1(p) = Kp1 + \frac{1}{Ti1 \cdot p}, \qquad Wr1(p) = 3 + \frac{1}{4 \cdot p},$$

$$Wr2(p) = Kp2 + \frac{1}{Ti2 \cdot p}, \qquad Wr2(p) = .46 + \frac{.208}{p}..$$

$$Wz1(i,w) = \frac{e^{(-.500)\cdot i\cdot w}\cdot(12.\cdot i\cdot w+1.)}{4.\cdot i^3\cdot w^3+6.\cdot i^2\cdot w^2+2.\cdot i\cdot w+12.\cdot e^{(-.500)\cdot i\cdot w}\cdot i\cdot w+e^{(-.500)\cdot i\cdot w}}.$$

Обозначим:

$$F1(i,w) = 30\cdot i^3\cdot w^3+45\cdot i^2\cdot w^2+15\cdot i\cdot w,$$

$$F2(i,w) = 12\cdot e^{(-.500)\cdot i\cdot w}\cdot i\cdot w+5\cdot e^{(-.500)\cdot i\cdot w},$$

тогда

$$Wz2(i,w) = \frac{e^{(-.500)\cdot i\cdot w}\cdot(12\cdot i\cdot w+5.)}{F1(i,w)+F2(i,w)}.$$

Поскольку объект имеет чистое запаздывание, то переходную функцию можно построить только по обобщенной вещественной частотной характеристике. Для этого необходимо знать пределы интегрирования, определяемые частотой среза замкнутой системы. Найдем её.

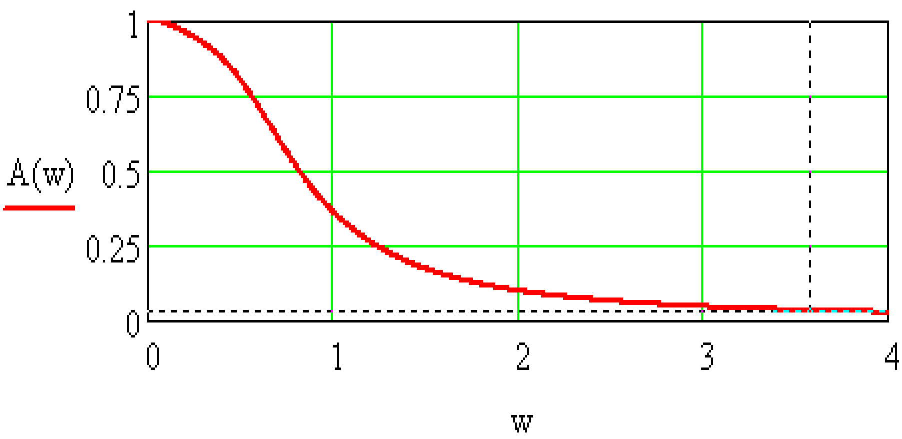

Рисунок 4 – Амплитудно-частотная характеристика замкнутой САУ

Частота среза Wc = 3,6 рад/ ед.времени. Построим графики переходных функций из области границы устойчивости Hz1(t) и области апериодической устойчивости Hz2(t)

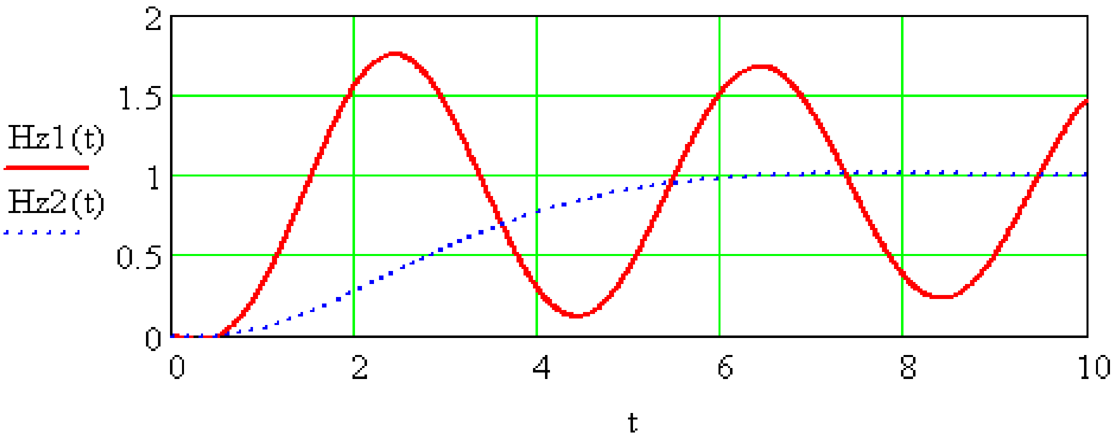

Рисунок 5 – Сравнительные графики переходных функций из области границы устойчивости Hz1(t) и области апериодической устойчивости Hz2(t)

Выводы:

1. Предложенный метод поиска области устойчивости параметров управляющего устройства намного проще классических методов, использующих критерий Гурвица, Михайлова, Найквиста-Михайлова, позволяющий в общем виде находить условия устойчивости, а не проверять систему на устойчивость при заданных параметрах.

2. Использование расширенных амплитудно-фазовых характеристик позволяет находить области устойчивости, обеспечивающие требуемую относительную степень затухания не ниже заданной вплоть до условия апериодичности (Эйлера, Штурма, Каца).

3. Метод не требует аппроксимации звена чистого запаздывания, что обеспечивает ему более точное и надежное определение желаемых областей.

Литература

1. Пугачев В.И. Теория автоматического управления: учебное пособие для подготовки бакалавров направления 220400 − Управление в технических системах / ФГБОУ ВПО «Кубан. гос. технол. ун–т», каф. автоматизации производственных процессов. − Краснодар: Издательский Дом − Юг, 2013. – 224 с.

2. Пугачев В. И. Оптимальное и адаптивное управление. Учебное пособие по дисциплинам: М В1.02 «Оптимальное и адаптивное управление», МДВ2.2.1 «Системы оптимального управления» для подготовки магистров по направлениям: 230100 Информатика и вычислительная техника, 220400 Управление в технических системах. / В. И. Пугачев; ФГБОУ ВПО «Кубан. гос. технол. у-нт. Каф. автоматизации производственных процессов. – Краснодар: Издательский Дом – Юг , 2013. – 160 с.

References

1. Pugachev V.I. Teorija avtomaticheskogo upravlenija: uchebnoe posobie dlja podgotovki bakalavrov napravlenija 220400 − Upravlenie v tehnicheskih sistemah / FGBOU VPO «Kuban. gos. tehnol. un–t», kaf. avtomatizacii proizvodstvennyh processov. − Krasnodar: Izdatel'skij Dom − Jug, 2013. – 224 s.

2. Pugachev V. I. Optimal'noe i adaptivnoe upravlenie. Uchebnoe posobie po disciplinam: M V1.02 «Optimal'noe i adaptivnoe upravlenie», MDV2.2.1 «Sistemy optimal'nogo upravlenija» dlja podgotovki magistrov po napravlenijam: 230100 Informatika i vychislitel'naja tehnika, 220400 Upravlenie v tehnicheskih sistemah. / V. I. Pugachev; FGBOU VPO «Kuban. gos. tehnol. u-nt. Kaf. avtomatizacii proizvodstvennyh processov. – Krasnodar: Izdatel'skij Dom – Jug , 2013. – 160 s.