УДК 511.37

**О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ СУММ ХАРАКТЕРОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И КОРОТКИХ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ СУММ**

Тимергалиев Ирек Саматович
*Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
e-mail: irek_tim@mail.ru

В статье доказаны теоремы о распределении значений сумм характеров абелевых групп и коротких показательных тригонометрических сумм по «сдвигам» интервалов суммирования. Получены асимптотические формулы для дробных моментов этих сумм

Ключевые слова:СУММЫ ХАРАКТЕРОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ СУММА, МЕРА, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ, ДРОБНЫЕ МОМЕНТЫ

UDC 511.37

**TO THE QUESTION OF VALUE DISTRIBUTION OF THE SUMS OF ABELIAN GROUP'S AND SHORT EXPONENTIAL TRIGONOMETRIC SUMS**

Timergaliev Irek Samatovich
*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
e-mail: irek_tim@mail.ru

Theorems of the value distribution of the sums of Abelian Group's characters and short exponentail triginimetric sums are proved in this article. Asymptotic formulas of these sums' fractional moments are proved

Keywords: SUMS OF ABELIAN GROUP'S CHARACTERS, TRIGONOMETRIC SUM, MEASURE, VALUES DISTRIBUTION, FRACTIONAL MOMENTS

В настоящей работе мы продолжаем исследования, начатые в [1-14]. В [15] была доказана теорема о распределении абсолютных значений сумм характеров абелевых групп, а в [16] получено распределение значений короткой показательной рациональной тригонометрической суммы. Возникают вопросы об оценке скорости сходимости к предельному распределению. Данная статья посвящена ответу на эти вопросы.

Рассмотрим бесконечную последовательность конечных абелевых групп $G_n$, таких что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, где $s_n$ — количество примарных циклических подгрупп в разложении группы $G_n$, и величину вида $\xi_n(\chi) = \left|\frac{1}{\sqrt{s_n}}\sum\limits_{a\in G_n}\chi(a)\right|$, где суммирование ведется по образующим примарных циклических подгрупп в разложении группы $G_n$, а $\chi$ — характер абелевой группы $G_n$. Обозначим через $D_n$ порядок группы $G_n$.

Пусть $m_a(n) = \frac{1}{D_n}\sum\limits_{\chi}\xi_n^a(\chi)$ — моменты рассматриваемой случайной величины. Докажем справедливость следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть* $\xi_n(\chi)$ — *величина, определенная выше. Тогда для* $1 \le r \le \sqrt{s_n}$ *имеет место асимптотическая формула*

$$m_{2r}(n) = r! + \theta \frac{r^2 r!}{s_n},$$

*где* $|\theta| \le 1$.

**Доказательство**. Вычислим момент порядка $2r$ случайной величины $\xi_n(\chi)$ для каждого $r \ge 1$:

$$m_{2r}(n) = \frac{1}{D_n} \sum_{\chi} \xi_n^{2r}(\chi) = \frac{1}{D_n} \cdot \frac{1}{s_n^r} \sum_{\chi} \left| \sum_{a \in G_n} \chi(a) \right|^{2r} =$$

$$= \frac{1}{s_n^r} \sum_{a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_r \in G_n} \frac{1}{D_n} \sum_{\chi} \chi(a_1 \dots a_r) \overline{\chi(b_1 \dots b_r)}.$$

Имеет место равенство

$$\frac{1}{D_n} \sum_{\chi} \chi(t) \overline{\chi(a)} = \begin{cases} 1, \text{если } t = a; \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$m_{2r}(n) = \frac{1}{s_n^r} \sum_{\substack{a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_r \in G_n \\ a_1 \dots a_r = b_1 \dots b_r}} 1.$$

Найдем количество решений уравнения $a_1 \dots a_r = b_1 \dots b_r$.В силу однозначности разложения на примарные сомножители набор чисел $b_1, \dots, b_r$ является перестановкой $a_1, \dots, a_r$. Если $a_1, \dots, a_r$ — различные, то таких наборов будет ровно $s_n(s_n - 1) \dots (s_n - r + 1)$, а число решений уравнения равно $r!\, s_n(s_n - 1) \dots (s_n - r + 1)$.

Если среди чисел $a_1, \dots, a_r$ есть хотя бы два одинаковых, то число таких наборов не превосходит $r(r-1)s_n^{r-1} \le r^2 s_n^{r-1}$. Соответственно, число решений уравнения $a_1 \dots a_r = b_1 \dots b_r$ среди таких наборов не превосходит $r!\, r^2 s_n^{r-1}$.

Пусть теперь $r \le \sqrt{s_n}$. Обозначим

$$\prod = s_n(s_n - 1) \dots (s_n - r + 1) = s_n^r \left(1 - \frac{1}{s_n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{s_n}\right).$$

Поделив это равенство на $s_n^r$ и прологарифмировав его, получаем

$$\ln \frac{\prod}{s_n^r} = \sum_{k=1}^{r-1} \ln\left(1 - \frac{k}{s_n}\right).$$

Так как верно неравенство $k \le r - 1 < \sqrt{s_n}$, то $1 - \frac{k}{s_n} > 1 - \frac{1}{\sqrt{s_n}}$, и, считая, что $s_n \ge 4$, заключаем

$$\frac{k/s_n}{1 - \frac{k}{s_n}} \le \frac{k}{s_n - \sqrt{s_n}} \le \frac{2k}{s_n}.$$

Поскольку $\ln\left(1 - \frac{k}{s_n}\right) > -\frac{k/s_n}{1 - \frac{k}{s_n}}$, то с учетом полученного выше неравенства имеем

$$\ln \frac{\prod}{s_n^r} > \sum_{k=1}^{r-1} -\frac{2k}{s_n} = -\frac{r(r-1)}{s_n}.$$

Из последнего неравенства следует

$$s_n^r e^{-\frac{r(r-1)}{s_n}} < \prod.$$

А с учетом того, что $e^{-\frac{r(r-1)}{s_n}} > 1 - \frac{r(r-1)}{s_n} > 1 - \frac{r^2}{s_n}$, получаем неравенство

$$s_n^r \left(1 - \frac{r^2}{s_n}\right) < s_n(s_n - 1) \dots (s_n - r + 1).$$

Таким образом, для $r \le \sqrt{s_n}$ верна формула

$$m_{2r}(n) = \frac{1}{s_n^r}(r!\,s_n^r + \theta r!\,r^2 s_n^{r-1}) = r! + \theta\frac{r^2 r!}{s_n},$$

где $|\theta| \le 1$. Теорема доказана.

Заметим, что при $r \le \sqrt[4]{s_n}$ верно, что

$$m_{2r}(n) = r!\left(1 + \theta\frac{1}{\sqrt{s_n}}\right),$$

где $|\theta| \le 1$.

Оценим меру $\mu$ больших значений суммы $S_n(\chi) = \sum_{a\in G_n}\chi(a)$, где суммирование, как и прежде, ведется по образующим примарных циклических подгрупп в разложении группы $G_n$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{D_n}$ и $\nu = \#\{\chi\colon |S_n(\chi)| \ge \lambda\sqrt{s_n}\}$ — количество $\chi$, для которых выполняется неравенство в скобках.

**Теорема 2.** *Для меры $\mu$ больших значений суммы $S_n(\chi)$ верно неравенство*

$$\mu < 3e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

**Доказательство**. Очевидно, что при $\lambda > \sqrt{s_n}$ будет верно, что $\nu = 0$. Поэтому можно считать, что $\lambda \le \sqrt{s_n}$. Рассмотрим $\lambda \ge \sqrt{e}$. Тогда

$$\frac{\nu}{D_n}\lambda^{2r}s_n^r = \frac{\nu}{D_n}(\lambda\sqrt{s_n})^{2r} \le \frac{1}{D_n}\sum_{\chi}|S_n(\chi)|^{2r}.$$

Пусть $r \le s_n$. Воспользовавшись тривиальной оценкой $m_{2r}(n) \le r!$, получим

$$\frac{\nu}{D_n}\lambda^{2r}s_n^r \le r!\,s_n^r \le r^r s_n^r,$$

откуда следует, что $\mu \le \left(\frac{r}{\lambda^2}\right)^r$.

Для $r = \left[\frac{\lambda^2}{e}\right]$ верны неравенства $\frac{\lambda^2}{e} - 1 < r \le \frac{\lambda^2}{e} \le \frac{s_n}{e}$.

С учетом данных неравенств получаем:

$\mu \leq e^{-r} < e \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}} < 3e^{-\frac{\lambda^2}{e}}$.

Если $\lambda < \sqrt{e}$, то воспользуемся тривиальной оценкой $\mu \leq 1$. Так как при таких $\lambda$ оценка $1 \leq 3e^{-\frac{\lambda^2}{e}}$ верна, то теорема доказана.

Справедлива следующая теорема о скорости сходимости распределения рассматриваемой случайной величины.

**Теорема 3.** *Пусть* $\xi_n(\chi)$ *— величина, определенная выше. Тогда найдется такое* $n_0$, *что для любого* $n > n_0$ *справедливо равенство*:

$F_n(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_n$,

где $F_n(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi_n(\chi)$ и $|R_n| \leq \frac{3240 \ln \ln s_n}{\sqrt{\ln s_n}}$.

**Доказательство**. Согласно доказанному выше, при $r \leq \sqrt[4]{s_n}$ верно

$m_{2r}(n) = r!\left(1 + \theta \frac{1}{\sqrt{s_n}}\right)$.

Положим $N = \left[\frac{1}{2}\ln\sqrt{s_n}\right] + 1$. Очевидно, что $N \leq \sqrt[4]{s_n}$. Таким образом, применив следствие 1 теоремы 1 ([17, 20]), получим утверждение теоремы.

Докажем справедливость следующей теоремы о дробных моментах.

**Теорема 4.** *Пусть* $\xi_n(\chi)$ *— величина, определенная выше. Тогда найдется такое* $n_0$, *что для любого* $n > n_0$ *и* $0 < a \leq \frac{1}{2^6}\ln s_n$ *справедливо равенство*:

$$m_a(n) = \Gamma(0.5a + 1) + \theta R_n$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера, $|\theta| \leq 1$ и

$$R_n = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \le a \le \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\frac{\ln s_n}{2}}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\frac{\ln s_n}{2}} < a \le \frac{1}{2^6}\ln s_n, \end{cases}$$

где

$$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{27}\ln\ln s_n}{\ln s_n}\right)^{\frac{a+2}{2}},$$

$$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{19}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln s_n}}{a\sqrt{2}}\right)}{\ln s_n}\right)^{\frac{a+2}{2}},$$

$$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln s_n}}{2^{27}}\right).$$

**Доказательство**. Воспользуемся тем, что при $r \le \sqrt[4]{s_n}$ верно равенство

$$m_{2r}(n) = r!\left(1 + \theta\frac{1}{\sqrt{s_n}}\right),$$

где $|\theta| \le 1$.

Положим $\rho = \frac{1}{2^4}$. Поскольку

$$\left[\frac{1}{2^4}\ln\left(\sqrt{s_n}\right)\right] + 1 < \sqrt[4]{s_n},$$

то можно применить теорему 1 из [18, 20].

В нашем случае $\sigma_{2\nu} \equiv \nu!$, $\delta = 1$ и $f(n) = \sqrt{s_n}$, откуда получаем требуемое утверждение.

Далее рассмотрим сумму вида $S_p(x;h) = \sum\limits_{x<n\le x+h} e^{2\pi i\frac{ag^n}{p}}$, и

нормированную случайную величину $\xi_x = \left|\frac{S_p(x;h)}{\sqrt{h}}\right|$, где $p$ — простое, $(a,p)=1$, $g$ — первообразный корень по модулю $p$, $x,n,a,h$ — натуральные числа, $x<p$. Также $\lim\limits_{p\to+\infty} h(p)=+\infty$ и $hg^h<p$.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема

**Теорема 5.** *Пусть $F_x$ — последовательность натуральных чисел такая, что $\frac{F_{x+1}}{F_x}\geq\beta>1$, $k$ — фиксированное натуральное число, $P$ — растущее натуральное число, $T$ — натуральное число, для которого верно неравенство $\frac{1}{\beta^T}<(1-1/\beta)^2$, $A_k(P)$ — количество решений диофантова уравнения*

$$F_{x_1}+\cdots+F_{x_k}=F_{y_1}+\cdots+F_{y_k}$$

*в целых числах $1\leq x_i,y_j\leq P$. Тогда при $2k^2T\leq P$*

$$A_k(P)=k!\,P^k+\theta c_0^k k!\,TP^{k-1},$$

*где $|\theta|\leq 1$, $c_0=\frac{2\beta}{\beta-1}$.*

Доказательство теоремы см. в [19] (стр. 19).

Далее, как и прежде, $m_a(p)=\frac{1}{p-1}\sum\limits_{1\leq x\leq p-1}\xi_x^a$ — моменты рассматриваемой случайной величины. Верна следующая теорема.

**Теорема 6.** *Пусть $\xi_x$ — величина, определенная выше. Тогда существует такое $p_1$,* что для всех $p\geq p_1$ и *для $1\leq r\leq\frac{\sqrt{h}}{2}$ имеет место асимптотическая формула*

$$m_{2r}(p)=r!\left(1+\theta\frac{5\cdot 4^r}{h}\right).$$

где $|\theta|\leq 1$.

**Доказательство**. Вычислим момент порядка $2r$ случайной величины $\xi_x$ для каждого $r\geq 1$. При этом будем следовать доказательству из [16].

$$m_{2r}(p) = \frac{1}{p-1} \sum_{1\le x\le p-1} \xi_x^{2r} =$$

$$= \frac{1}{p-1} \sum_{1\le x\le p-1} \left| \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{0<m\le h} e^{2\pi i \frac{ag^{x+m}}{p}} \right|^{2r} =$$

$$= \frac{1}{h^r} \cdot \frac{1}{p-1} \sum_{m_1,\dots,m_{2r}=1}^{h} \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{ag^x}{p}(g^{m_1}+\dots+g^{m_r}-g^{m_{r+1}}-\dots-g^{m_{2r}})}.$$

Поскольку $x$ пробегает приведенную систему вычетов по модулю $p$, а $g$ — первообразный корень, то $ag^x$ тоже пробегает приведенную систему вычетов по модулю $p$.

Имеет место следующее равенство:

$$\sum_{b=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{b\sigma}{p}} = \begin{cases} p-1, & \text{если } \sigma \equiv 0 \pmod p; \\ -1, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Поэтому

$$m_{2r}(p) = \frac{1}{h^r} A_1 - \frac{1}{h^r} \frac{1}{p-1} A_2,$$

где $A_1$ — количество решений сравнения

$$g^{m_1} + \dots + g^{m_r} \equiv g^{m_{r+1}} + \dots + g^{m_{2r}} \pmod p,$$

а $A_2 = h^{2r} - A_1$.

Поскольку $hg^h < p$, вместо сравнения

$$g^{m_1} + \dots + g^{m_r} \equiv g^{m_{r+1}} + \dots + g^{m_{2r}} \pmod p$$

можно рассмотреть равенство

$$g^{m_1} + \dots + g^{m_r} = g^{m_{r+1}} + \dots + g^{m_{2r}}.$$

Применим теорему 5. В нашем случае $F_x = g^x$, соответственно, $\beta = g \ge 2$, $P = h$, $k = r$. Все условия теоремы 5 выполняются, а значит при $2r^2T \le h$ и $\frac{1}{g^T} < (1 - 1/g)^2$ имеем

$A_1 = r!\,h^r + \theta 2c_0^r Tr!\,h^{r-1}$,

где $|\theta| \le 1$, $c_0 = \frac{2g}{g-1}$.

Тогда $A_2 = h^{2r} - r!\,h^r - \theta 2c_0^r Tr!\,h^{r-1}$ и

$$m_{2r}(p) = r! + \theta 2c_0^r Tr!\frac{1}{h} - \frac{1}{h^r}\frac{1}{p-1}\cdot(h^{2r} - r!\,h^r - \theta 2c_0^r Tr!\,h^{r-1}) =$$

$$= r! + \theta 2c_0^r Tr!\frac{1}{h} - \frac{h^r}{p-1} + \frac{r!}{p-1} + \theta 2c_0^r Tr!\frac{1}{(p-1)h}.$$

Положим $T = 2$. Так как $g \ge 2$, то $c_0 \le 4$ и, таким образом, для $r \le \frac{\sqrt{h}}{2}$

$$m_{2r}(p) = r! + 4\theta 4^r r!\frac{1}{h} - \frac{h^r}{p-1} + \frac{r!}{p-1} + 4\theta 4^r r!\frac{1}{(p-1)h}.$$

Тогда существует такое $p_1$, что для всех $p \ge p_1$ и $r \le \frac{\sqrt{h}}{2}$ можно записать

$$m_{2r}(p) = r!\left(1 + \theta\frac{5\cdot 4^r}{h}\right).$$

Теорема доказана.

Оценим меру $\mu$ больших значений суммы $S_p(x)$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{p-1}$, где $\nu = \#\{x: |S_p(x)| \ge \lambda\sqrt{h}\}$ — количество $x$, для которых выполняется неравенство в скобках.

**Теорема 7.** *Для меры $\mu$ больших значений суммы $S_h(x)$ верно неравенство*

$$\mu < 3\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2e}}.$$

**Доказательство**. Очевидно, что при $\lambda > \sqrt{h}$ будет верно, что $\nu = 0$. Поэтому можно считать, что $\lambda \le \sqrt{h}$. Рассмотрим $\lambda \ge \sqrt{2e}$. Тогда

$$\frac{\nu}{p-1}\lambda^{2r}h^r = \frac{\nu}{p-1}(\lambda\sqrt{h})^{2r} \le \frac{1}{p-1}\sum_{x=1}^{p-1}|S_h(x)|^{2r} = h^r m_{2r}(p).$$

В ходе доказательства теоремы 6 было получено, что

$$m_{2r}(p) = \frac{1}{h^r}A_1 - \frac{1}{h^r}\frac{1}{p-1}A_2,$$

где $A_1$ — количество решений уравнения

$$g^{m_1} + \dots + g^{m_r} = g^{m_{r+1}} + \dots + g^{m_{2r}}.$$

В [19, стр. 17] было показано, что уравнение такого типа имеет не более $c^r r!\, h^r$ решений, где $c = \frac{g}{g-1}$. Так как $g \geq 2$, то $c \leq 2$ и, таким образом, верна оценка

$$m_{2r}(p) \leq \frac{1}{h^r}A_1 \leq 2^r r! \leq (2r)^r,$$

откуда получаем, что $\mu \leq \left(\frac{2r}{\lambda^2}\right)^r$.

Для $r = \left[\frac{\lambda^2}{2e}\right]$ верны неравенства $\frac{\lambda^2}{2e} - 1 < r \leq \frac{\lambda^2}{2e} \leq \frac{h}{e}$.

С учетом данных неравенств получаем:

$$\mu \leq e^{-r} < e \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2e}} < 3 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2e}}.$$

Если $\lambda < \sqrt{2e}$, то воспользуемся тривиальной оценкой $\mu \leq 1$. Так как при таких $\lambda$ оценка $1 \leq 3 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2e}}$ верна, то теорема доказана.

Для дальнейших рассуждений положим $h = \sqrt{\ln p}$. Для $r \leq \frac{\ln h}{4}$ верны неравенства

$$4^r \leq e^{\frac{\ln h}{4}\ln 4} = e^{\frac{\ln h}{2}\frac{\ln 4}{2}} = (\sqrt{h})^{\frac{\ln 4}{2}} \leq \frac{\sqrt{h}}{5}.$$

Существует такое $p_2$, что для всех $p > p_2$ верно неравенство $\frac{\ln h}{4} < \frac{\sqrt{h}}{4}$. Таким образом, с учетом теоремы 6, при $p > p_0$, где $p_0 = \max(p_1, p_2)$, и при $r \leq \frac{\ln h}{4}$ имеет место следующее выражение:

$$m_{2r}(p) = r!\left(1 + \theta\frac{1}{\sqrt[4]{\ln p}}\right),$$

где $|\theta| \le 1$.

Справедлива следующая теорема о скорости сходимости распределения рассматриваемой случайной величины.

**Теорема 8.** *Пусть* $\xi_x$ *— величина, определенная выше, где* $h = \sqrt{\ln p}$. *Тогда найдется такое* $p_0$, *что для любого* $p > p_0$ *справедливо равенство*:

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

где $F_p(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi_x$ и $|R_p| \le \frac{6480\ln\ln\ln p}{\sqrt{\ln\ln p}}$.

**Доказательство**. Согласно доказанному выше, при $r \le \frac{\ln\ln p}{8}$ верно

$$m_{2r}(p) = r!\left(1 + \theta\frac{1}{\sqrt[4]{\ln p}}\right).$$

Пусть $N = \left[\frac{1}{4}\ln(\sqrt[4]{\ln p})\right] + 1$. Поскольку $\left[\frac{1}{16}\ln\ln p\right] + 1 < \frac{\ln\ln p}{8}$, то можно воспользоваться следствием 1 теоремы 1 из [17, 20], из которого следует требуемая теорема.

**Теорема 9.** *Пусть* $\xi_x$ *— величина, определенная выше, где* $h = \sqrt{\ln p}$. *Тогда найдется такое* $p_0$, *что для любого* $p > p_0$ *и* $0 < a \le \frac{1}{2^7}\ln\ln p$

*справедливо равенство*:

$$m_a(p) = \Gamma(0.5a + 1) + \theta R_p$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера, $|\theta| \le 1$ и

$$R_p = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \le a \le \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p} < a \le \frac{1}{2^7}\ln\ln p, \end{cases}$$

где

$$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{28}\ln\ln\ln p}{\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}},$$

$$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{20}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2a}\right)}{\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}},$$

$$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2^{27}}\right).$$

**Доказательство**. Воспользуемся тем, что при $p > p_0$ и при $r \leq \frac{\ln\ln p}{8}$ верно равенство

$$m_{2r}(p) = r!\left(1+\theta\frac{1}{\sqrt[4]{\ln p}}\right),$$

где $|\theta| \leq 1$

Положим $\rho = \frac{1}{2^4}$. Поскольку

$$\left[\frac{1}{2^4}\ln(\sqrt[4]{\ln p})\right]+1 < \frac{\ln\ln p}{8},$$

то можно применить теорему 1 из [18, 20].

В нашем случае $\sigma_{2\nu} \equiv \nu!$, $\delta = 1$ и $f(p) = \sqrt[4]{\ln p}$, откуда получаем требуемое утверждение.

**Литература**

1. Бояринов Р.Н., Чубариков В.Н. О распределении значений функций на последовательности Фибоначчи// ДАН. 2001. Т.379. № 1. С. 9-11.

2. Бояринов Р.Н. Центральная предельная теорема для равномерного распределения дробных долей быстрорастущих последовательностей// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех. 2001. № 5. С. 52-54.

3. Бояринов Р.Н., Нгонго И.С., Чубариков В.Н. О новых метрических теоремах в методе А. Г. Постникова// Актуальные проблемы теории чисел: Труды IV Межд. Конф.; Тульский государственный педагогический университет. Тула. 2002. С. 5-31.

4. Бояринов Р.Н. О распределении значений сумм, связанных с быстрорастущими последовательностями// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех. 2003. № 2. С. 57-58.

5. Boyarinov R.N., Chubarikov V.N., Ngongo I.S. Asymptotic formulas for fractional moments of special sums// Чебышевский сборник , т. 4, вып. 4. 2003. С.173-183.
6. Бояринов Р.Н. О распределении значений аналога дзетовой суммы// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех. 2004. № 3. С. 55-56.
7. Бояринов Р.Н. О скорости сходимости к предельному показательному распределению// Чебышевский сборник , т. 6, вып. 1. 2005. С.50-57.
8. Бояринов Р.Н. Аргумент дзета-функции Римана// Чебышевский сборник, т. 11, вып. 1. 2010. С. 54-67.
9. Бояринов Р.Н. О скорости сходимости к предельному распределению// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех. 2011. № 2. С. 20-27.
10. Бояринов Р.Н. Вероятностные методы в теории аргумента дзета-функции Римана// Теория вероятностей и ее применения, Т.56. № 2. 2011. С. 209-223.
11. Бояринов Р.Н. О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы// Дискр. матем. Т.4, № 1. 2012. С. 26-29.
12. Тимергалиев И.С. О распределении значений сумм Клостермана// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех. 2013. № 5. С. 37-41.
13. Тимергалиев И.С., Бояринов Р.Н. О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы на коротких интервалах// Чебышевский сборник т.14, вып 2. 2013. С. 154-163
14. Тимергалиев И.С., Бояринов Р.Н. О распределении значений неполных сумм Гаусса// Чебышевский сборник Т.14, вып 3. 2013 С.132-138
15. Бояринов Р.Н., Нгонго И.С., Чубариков В.Н. О моделировании случайных величин на последовательности конечных абелевых групп// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех. 2004. № 2. С. 69-71.
16. Нгонго И.С. О распределении значений коротких сумм: Дисс. канд. физ.–мат. наук. М., 2002, 82 с.
17. Бояринов Р.Н. О скорости сходимости распределений случайных величин// ДАН.2010. Т.435. № 3. С. 295-297.
18. Бояринов Р.Н. О дробных моментах случайных величин// ДАН.2011. Т.436. № 3. С. 299-301.
19. Бояринов Р. Н. О распределении значений сумм арифметических функций: дисс. канд. физ.–мат. наук. М., 2002, 84 с.
20. Бояринов Р. Н. Вероятностные методы в теории чисел и приложения в теории аргумента дзета–функции Римана: дисс. доктора физ.–мат. наук. М., 2012, 277 с.

**References**

1. Bojarinov R.N., Chubarikov V.N. O raspredelenii znachenij funkcij na posledovatel'nosti Fibonachchi// DAN. 2001. T.379. № 1. S. 9-11.
2. Bojarinov R.N. Central'naja predel'naja teorema dlja ravnomernogo raspredelenija drobnyh dolej bystrorastushhih posledovatel'nostej// Vestnik MGU. Ser.1, mat. meh. 2001. № 5. S. 52-54.
3. Bojarinov R.N., Ngongo I.S., Chubarikov V.N. O novyh metricheskih teoremah v metode A. G. Postnikova// Aktual'nye problemy teorii chisel: Trudy IV Mezhd. Konf.; Tul'skij gosudarstvennyj pedagogicheskij universitet. Tula. 2002. S. 5-31.
4. Bojarinov R.N. O raspredelenii znachenij summ, svjazannyh s bystrorastushhimi posledovatel'nostjami// Vestnik MGU. Ser.1, mat. meh. 2003. № 2. S. 57-58.

5. Boyarinov R.N., Chubarikov V.N., Ngongo I.S. Asymptotic formulas for fractional moments of special sums// Chebyshevskij sbornik , t. 4, vyp. 4. 2003. S.173-183.
6. Bojarinov R.N. O raspredelenii znachenij analoga dzetovoj summy// Vestnik MGU. Ser.1, mat. meh. 2004. № 3. S. 55-56.
7. Bojarinov R.N. O skorosti shodimosti k predel'nomu pokazatel'nomu raspredeleniju// Chebyshevskij sbornik , t. 6, vyp. 1. 2005. S.50-57.
8. Bojarinov R.N. Argument dzeta-funkcii Rimana// Chebyshevskij sbornik, t. 11, vyp. 1. 2010. S. 54-67.
9. Bojarinov R.N. O skorosti shodimosti k predel'nomu raspredeleniju// Vestnik MGU. Ser.1, mat. meh. 2011. № 2. S. 20-27.
10. Bojarinov R.N. Verojatnostnye metody v teorii argumenta dzeta-funkcii Rimana// Teorija verojatnostej i ee primenenija, T.56. № 2. 2011. S. 209-223.
11. Bojarinov R.N. O raspredelenii absoljutnyh znachenij trigonometricheskoj summy// Diskr. matem. T.4, № 1. 2012. S. 26-29.
12. Timergaliev I.S. O raspredelenii znachenij summ Klostermana// Vestnik MGU. Ser.1, mat. meh. 2013. № 5. S. 37-41.
13. Timergaliev I.S., Bojarinov R.N. O raspredelenii absoljutnyh znachenij trigonometricheskoj summy na korotkih intervalah// Chebyshevskij sbornik t.14, vyp 2. 2013. S. 154-163
14. Timergaliev I.S., Bojarinov R.N. O raspredelenii znachenij nepolnyh summ Gaussa// Chebyshevskij sbornik T.14, vyp 3. 2013 S.132-138
15. Bojarinov R.N., Ngongo I.S., Chubarikov V.N. O modelirovanii sluchajnyh velichin na posledovatel'nosti konechnyh abelevyh grupp// Vestnik MGU. Ser.1, mat. meh. 2004. № 2. S. 69-71.
16. Ngongo I.S. O raspredelenii znachenij korotkih summ: Diss. kand. fiz.–mat. nauk. M., 2002, 82 s.
17. Bojarinov R.N. O skorosti shodimosti raspredelenij sluchajnyh velichin// DAN.2010. T.435. № 3. S. 295-297.
18. Bojarinov R.N. O drobnyh momentah sluchajnyh velichin// DAN.2011. T.436. № 3. S. 299-301.
19. Bojarinov R. N. O raspredelenii znachenij summ arifmeticheskih funkcij: diss. kand. fiz.–mat. nauk. M., 2002, 84 s.
20. Bojarinov R. N. Verojatnostnye metody v teorii chisel i prilozhenija v teorii argumenta dzeta–funkcii Rimana: diss. doktora fiz.–mat. nauk. M., 2012, 277 s.