

УДК 51-71:541.13

UDC 51-71:541.13

**НАХОЖДЕНИЕ ВЫСШИХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МОДЕЛИ ЗОМ**

**THE HIGHER ASYMPTOTIC EXPANSIONS FINDING FOR BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE ZOM MODEL**

Коваленко Анна Владимировна  
к.э.н., доцент кафедры прикладной математики

Kovalenko Anna Vladimirovna  
Cand.Econ.Sci., associate professor

Уртенов Махамет Хусеевич  
д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики

Urtenov Mahamet Khuseevich  
Dr.Sci.Phys.-Math., professor

*Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*

*Kuban State University, Krasnodar, Russia*

Хромых Анна Алексеевна  
преподаватель кафедры информатики и математики  
*Краснодарский университет МВД России, Краснодар, Россия*

Khromykh Anna Alekseevna  
lecturer  
*Ministry of Internal Affairs Krasnodar University of Russia, Krasnodar, Russia*

Чубырь Наталья Олеговна  
к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры прикладной математики  
*Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия*

Chubyr Natalya Olegovna  
Cand.Phys.-Math.Sci., senior lecturer  
*Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia*

В работе предлагается асимптотическое решение краевой задачи, моделирующей перенос ионов соли в камере обессоливания электродиализного аппарата. Для этого область камеры обессоливания разбивается на две подобласти: электронейтральности и пространственного заряда, в каждой из которых, асимптотическое разложение имеет свой вид. В области пространственного заряда для однозначной разрешимости текущего приближения используется условие разрешимости следующего приближения

In this article authors propose the asymptotic solution of the boundary value problem modeling the transport of salt ions in the cell electro dialysis desalination unit. The domain of the camera desalting broken into two subdomains: electroneutrality and space charge. Subdomains has own asymptotic expansion. The subdomain of the space charge has unique solvability of the current approach used by the solvability condition of the next approximation

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, БИНАРНЫЙ ЭЛЕКТРОЛИТ, СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НЕРНСТА-ПЛАНКА-ПУАССОНА, ФУНКЦИЯ ХЭВИСАЙДА, ОБЛАСТЬ ЭЛЕКТРОНЕЙТРАЛЬНОСТИ, ОБЛАСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Keywords: MATHEMATICAL MODELING, ASYMPTOTIC METHODS, NUMERICAL METHODS, BINARY ELECTROLYTE, SYSTEM OF EQUATIONS OF NERNST-PLANK-PUASSON, HEVISAYD'S FUNCTION, ELECTRONEUTRALITY AREA, AREA OF SPATIAL CHARGE

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 13-08-96519-р\_юг\_а, 13-08-96525-р\_юг\_а и № 13-08-00464 А.

## Введение

Электродиализ – это процесс опреснения воды с использованием ионообменных мембран под действием электрического тока, является достаточно развитой технологией и широко применяется уже в течение более 60 лет. Новые идеи из других областей знаний, а именно, из микро- и нанофлюидики, позволяют предложить новые концепции электромембранных устройства для опреснения воды, использующие обширный пространственный заряд в качестве барьера для переноса ионов. В связи с этим существует значительная потребность как в фундаментальных, а так же в прикладных научных исследований в целях совершенствования этих процессов. Электродиализный аппарат имеет периодическую структуру, состоящую из чередующих камер обессоливания и концентрирования, а также двух электродных камер. Изменение концентрации в камере концентрирования можно учесть в граничных условиях. Таким образом, основной задачей является моделирование переноса в камере обессоливания. Пусть  $x=0$  – соответствует условной межфазной границе анионообменная мембрана/раствор,  $x=1$  – соответствует условной межфазной границе катионообменная мембрана/раствор,  $y=0$  – входу, а  $y=L$  – выходу из камеры обессоливания,  $V$  – заданная скорость прокачивания раствора.

Для математического моделирования явлений переноса для бинарного электролита в таких условиях, как правило, используется краевая задача для системы уравнений Нернста-Планка и Пуассона, которая достаточно сложна для аналитического и численного решения. Нами в работе [1] из системы уравнений Нернста-Планка и Пуассона была выведена упрощенная модельная задача ЗОМ (обобщенный закон Ома) и показано, что она достаточно адекватна. В данной работе предлагается асимптотическое решение соответствующей краевой задачи.

## 1. Постановка задачи

Модельная задача ЗОМ имеет безразмерный вид [1,2]:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \lambda \Delta \tilde{S} - \operatorname{div}(\tilde{S} \mathbf{V}) + z_1 z_2 \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{div}(\|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{V}), \quad (1)$$

$$z_1^2 z_2^2 \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{E} - z_1 z_2 \tilde{S} \mathbf{E} - \mathbf{I} = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \eta = -z_1 z_2 \lambda \left( \nabla \left( \tilde{S} - z_1 z_2 \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{E}\|^2 \right) \cdot \mathbf{E} \right), \quad (3)$$

где  $\mathbf{E}$  – искомая напряженность,  $C_1, C_2$  – концентрации катионов и анионов,  $\tilde{S} = C_1 + C_2 - \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{E}\|^2$  – обобщенная общая «концентрация»,  $\mathbf{I}$  – плотность тока,  $h$  – функция тока для плотности тока  $\mathbf{I}$ , т.е.  $I_1 = -h_y, I_2 = h_x$ ,  $\varepsilon > 0$  – безразмерный малый параметр, равный удвоенному квадрату отношения Дебаевской длины к ширине канала,  $\lambda = 1/Pe$ ,  $Pe$  – число Пекле,  $\mathbf{V}$  – заданная скорость протока электролита в камере обессоливания,  $L$  – длина канала,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$  – кососимметрическое скалярное произведение.

Краевые условия имеют вид:

$$\tilde{S}|_{x=0} = A_0(y), \quad \tilde{S}|_{x=1} = A_1(y), \quad \tilde{S}|_{y=0} = B_0(x), \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}|_{y=L} = B_1(x), \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}|_{x=0} = Q_0(y), \quad \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=x_k} = Q_1(y), \quad h|_{y=0} = 0, \quad \eta|_{y=L} = -i_{av} L, \quad (5)$$

$$\tilde{S}|_{t=0} = K_0(x, y), \quad h|_{t=0} = M_0(x, y), \quad (6)$$

где функции  $A_0(y), A_1(y), B_0(x), B_1(x), Q_0(y), Q_1(y), K_0(x, y), M_0(x, y)$  считаются известными,  $i_{av}$  – ток в цепи. Выбор конкретных функции зависит от целей физико-химического исследования, здесь мы рассматриваем общий случай.

Из физического смысла функции  $B_0(x)$  следует, что в допредельном режиме  $B_0(x) > 0$  при  $x \in [0; 1]$ . В предельном случае  $B_0(x) > 0$  при  $x \in (0; 1)$  и

$B_0(0) = B_0(1) = 0$ . В запредельном режиме она меняет свой знак дважды, т.е.

$$\exists \bar{x}_1, \bar{x}_2, \text{ что } B_0(x) = \begin{cases} < 0, & 0 \leq x < \bar{x}_1, \\ \geq 0, & \bar{x}_1 \leq x \leq \bar{x}_2, \\ < 0, & \bar{x}_2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Нами показано, что из этого следует, что функция  $\tilde{S}$  имеет три области знакопостоянства, причем область ( $U_2$ ), где она положительно является областью электронейтральности, а отрицательно ( $U_1 = U_{1,1} \cup U_{1,2}$ ) – пространственного заряда (см. рис.1).

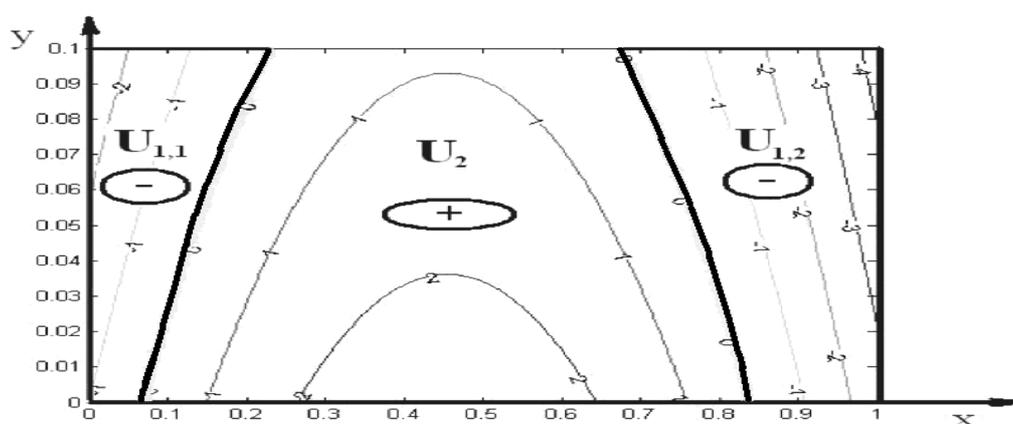


Рис. 1. Области знакопостоянства функции  $\tilde{S}$ .

В соответствии с этим для нахождения функций  $\tilde{S}(t, x, y, e)$ ,  $E(t, x, y, e)$  и  $h(t, x, y, e)$  нами предлагается асимптотический метод, имеющий ряд особенностей:

1) Исходная область (камера обессоливания) разбивается на подобласти: электронейтральности, пространственного заряда и промежуточных слоев, в каждой из которых, асимптотическое разложение имеет свой вид.

2) В области пространственного заряда, состоящей, в свою очередь, из двух подобластей, примыкающих к ионообменным мембранам, для однозначной разрешимости текущего приближения используется условие разрешимости следующего приближения.

3) Промежуточные слои служат для сращивания решений из областей электронейтральности и пространственного заряда.

## 2. Асимптотическое решение в области электронейтральности

### 2.1. Асимптотическое разложение

Для асимптотического решения в области положительности функции  $\tilde{S}$  используем следующие разложения:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \tilde{S}^{(0)} + \tilde{S}^{(1)}\varepsilon + \dots + \tilde{S}^{(i)}\varepsilon^i + \dots, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)}\varepsilon + \dots + \mathbf{E}^{(i)}\varepsilon^i + \dots, \\ \eta &= \eta^{(0)} + \eta^{(1)}\varepsilon + \dots + \eta^{(i)}\varepsilon^i + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Ниже приведены первые два приближения и показан алгоритм их решения. Уравнения произвольного приближения выписываются и решаются аналогично, и здесь не приводятся из их громоздкости.

### 2.2. Алгоритм решения начального и первого приближения

Для начального приближения получается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \tilde{S}^{(0)}}{\partial t} = \lambda \Delta \tilde{S}^{(0)} - \text{div}(\tilde{S}^{(0)} \mathbf{V}), \quad z_1 z_2 \tilde{S}^{(0)} \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{I}^{(0)} = 0, \quad \Delta \eta^{(0)} = -z_1 z_2 \lambda (\nabla \tilde{S}^{(0)}, \mathbf{E}^{(0)})_{\parallel}$$

Эта система уравнений может быть получена из исходной системы уравнений (1), (2), (3), если формально положить  $\varepsilon = 0$ , что соответствует выполнению условия электронейтральности [1]. Таким образом, можно считать область, где  $\tilde{S} > 0$  областью электронейтральности, и соответственно, область где  $\tilde{S} < 0$  – областью пространственного заряда.

После ряда преобразований получаем:

$$\frac{\partial \tilde{S}^{(0)}}{\partial t} = \lambda \Delta \tilde{S}^{(0)} - \text{div}(\tilde{S}^{(0)} \mathbf{V}) \quad (8)$$

$$\mathbf{E}^{(0)} = -\frac{1}{z_1 z_2 \tilde{S}^{(0)}} \mathbf{I}^{(0)} \quad (9)$$

$$\Delta \eta^{(0)} = \frac{\lambda}{\tilde{S}^{(0)}} (\nabla \tilde{S}^{(0)}, \nabla \eta^{(0)}) \quad (10)$$

Вначале находится решение уравнения (8), затем (10) и (9). Для приближения первого порядка получаем систему уравнений (11-13)

$$\frac{\partial \tilde{S}^{(1)}}{\partial t} = \lambda \Delta \tilde{S}^{(1)} - \operatorname{div}(\tilde{S}^{(1)} \mathbf{V}) + z_1 z_2 \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{div} \left( \|\mathbf{E}^{(0)}\|^2 \mathbf{V} \right) \quad (11)$$

$$z_1^2 z_2^2 \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^{(0)}\|^2 \mathbf{E}^{(0)} - z_1 z_2 (\tilde{S}^{(1)} \mathbf{E}^{(0)} + \tilde{S}^{(0)} \mathbf{E}^{(1)}) - \mathbf{I}^{(1)} = 0 \quad (12)$$

$$\Delta \eta^{(1)} = -z_1 z_2 \lambda (\nabla \tilde{S}^{(0)}, \mathbf{E}^{(1)}) - z_1 z_2 \lambda \left( \nabla \left( \tilde{S}^{(1)} - z_1 z_2 \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^{(0)}\|^2 \right), \mathbf{E}^{(0)} \right) \quad (13)$$

Для решения этой системы выразим из уравнения (12)  $\mathbf{E}^{(1)}$  через  $\mathbf{I}^{(1)}$ :

$$\mathbf{E}^{(1)} = -\frac{1}{z_1 z_2 \tilde{S}^{(0)}} \mathbf{I}^{(1)} - \frac{1}{\tilde{S}^{(0)}} \left( \tilde{S}^{(1)} - \frac{z_1 z_2}{2} \|\mathbf{E}^{(0)}\|^2 \right) \mathbf{E}^{(0)} \quad (14)$$

Подставим (14) в (13), тогда:

$$\begin{aligned} \Delta \eta^{(1)} = & \frac{1}{\tilde{S}^{(0)}} \lambda (\nabla \tilde{S}^{(0)}, \eta^{(1)}) + \frac{z_1 z_2}{\tilde{S}^{(0)}} \lambda \left( \nabla \tilde{S}^{(0)}, \left( \tilde{S}^{(1)} - \frac{z_1 z_2}{2} \|\mathbf{E}^{(0)}\|^2 \right) \mathbf{E}^{(0)} \right) - \\ & - z_1 z_2 \lambda \left( \nabla \left( \tilde{S}^{(1)} - \frac{z_1 z_2}{2} \|\mathbf{E}^{(0)}\|^2 \right), \mathbf{E}^{(0)} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Система уравнений (11), (14), (15) решается последовательно, сначала решается уравнение (11), затем (15) и (14).

### 3. Асимптотическое решение в области пространственного заряда

#### 3.1. Асимптотическое разложение

Сделаем замену:  $\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \tilde{\mathbf{E}}$ , и используем в области отрицательности

функции  $\tilde{S}$  для асимптотического решения следующие разложения:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \tilde{S}^{(0)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{S}^{(1)} + \varepsilon \tilde{S}^{(2)} + \dots + \varepsilon^{\frac{i}{2}} \tilde{S}^{(i)} + \dots, \\ \tilde{\mathbf{E}} &= \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} + \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}^{(2)} + \dots + \varepsilon^{\frac{i}{2}} \tilde{\mathbf{E}}^{(i)} + \dots, \\ \eta &= \eta^{(0)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \eta^{(1)} + \varepsilon \eta^{(2)} + \dots + \varepsilon^{\frac{i}{2}} \eta^{(i)} + \dots, \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь, также как и выше, мы ограничиваемся нахождением решения первых двух приближений.

#### 3.2. Алгоритм решения начального и первого приближения

Система уравнений для начального приближения имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{S}^{(0)}}{\partial t} = \lambda \Delta \tilde{S}^{(0)} - \operatorname{div}(\tilde{S}^{(0)} \mathbf{V}) + \frac{z_1 z_2}{2} \operatorname{div} \left( \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 \mathbf{V} \right) \quad (17)$$

$$- z_1 z_2 \left( \tilde{S}^{(0)} - \frac{z_1 z_2}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 \right) \mathbf{E}^{(0)} = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left( (1-\lambda) \left( \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \eta^{(0)}}{\partial x^2} + \left( \left( \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + (1-\lambda) \left( \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \eta^{(0)}}{\partial y^2} - \\ & - 2\lambda \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta^{(0)}}{\partial x \partial y} = - \frac{\lambda \|\nabla \eta^{(0)}\|^2}{2 \tilde{S}^{(0)}} (\nabla \eta^{(0)}, \nabla \tilde{S}^{(0)}) \end{aligned} \quad (19)$$

Система уравнений для первого приближения имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{S}^{(1)}}{\partial t} = \lambda \Delta \tilde{S}^{(1)} - \operatorname{div}(\tilde{S}^{(1)} \mathbf{V}) + \frac{z_1 z_2}{2} \operatorname{div} \left( 2(\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) \mathbf{V} \right) \quad (20)$$

$$- z_1 z_2 \left( \tilde{S}^{(0)} - \frac{z_1 z_2}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 \right) \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} - z_1 z_2 \left( \tilde{S}^{(1)} - z_1 z_2 (\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(1)}) \right) \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} = \mathbf{I}^{(0)} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Delta \eta^{(1)} = & - z_1 z_2 \lambda \left( \nabla \left( \tilde{S}^{(0)} - \frac{z_1 z_2}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 \right), \tilde{\mathbf{E}}^{(2)} \right) - z_1 z_2 \lambda \left( \nabla \left( \tilde{S}^{(1)} - z_1 z_2 (\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) \right), \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} \right) - \\ & - z_1 z_2 \lambda \left( \nabla \left( \tilde{S}^{(2)} - \frac{z_1 z_2}{2} \left( 2(\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(2)}) + \|\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}\|^2 \right) \right), \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Ниже будет показано, что нам для решения приближения первого порядка потребуется система уравнений для второго приближения для  $\tilde{\mathbf{E}}^{(2)}$ , которая имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{z_1^2 z_2^2}{2} \left( \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 \tilde{\mathbf{E}}^{(2)} + 2(\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(1)}) \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} + 2(\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(2)}) \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} + \|\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}\|^2 \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right) - \\ & - z_1 z_2 \left( \tilde{S}^{(0)} \tilde{\mathbf{E}}^{(2)} + \tilde{S}^{(1)} \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} + \tilde{S}^{(2)} \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right) = \mathbf{I}^{(1)} \end{aligned} \quad (23)$$

Из (18) следует (24). поскольку решение  $\tilde{\mathbf{E}}^{(0)} = 0$  не является физически корректным. С учетом (24) уравнения (17) и (19) преобразуются к (25).

$$\tilde{S}^{(0)} - \frac{z_1 z_2}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}^{(0)}}{\partial t} = \lambda \Delta \tilde{S}^{(0)} \quad (25)$$

$$\Delta\eta^{(0)} = -z_1 z_2 \lambda \left( \nabla \left( \tilde{S}^{(1)} - z_1 z_2 \left( \tilde{\mathbf{E}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right) \right), \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right) \quad (26)$$

Уравнение (24) не позволяет однозначно находить  $\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}$ . В то же время уравнение (21) для  $\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}$  с учетом (24) запишется в виде:

$$-z_1 z_2 \left( \tilde{S}^{(1)} - z_1 z_2 \left( \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} \right) \right) \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} = \mathbf{I}^{(0)} \quad \text{или} \quad (27)$$

$$\left( \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} \right) \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} = \frac{1}{z_1^2 z_2^2} \mathbf{I}^{(0)} + \frac{1}{z_1 z_2} \tilde{S}^{(1)} \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \quad (28)$$

Введем в рассмотрение матрицу (29), тогда система уравнений (28) запишется в (30).

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_1^{(0)} \tilde{\mathbf{E}}_1^{(0)} & \tilde{\mathbf{E}}_1^{(0)} \tilde{\mathbf{E}}_2^{(0)} \\ \tilde{\mathbf{E}}_1^{(0)} \tilde{\mathbf{E}}_2^{(0)} & \tilde{\mathbf{E}}_2^{(0)} \tilde{\mathbf{E}}_2^{(0)} \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$A \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} = \frac{1}{z_1^2 z_2^2} \mathbf{I}^{(0)} + \frac{1}{z_1 z_2} \tilde{S}^{(1)} \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \quad (30)$$

Определитель матрицы  $A$  равен нулю ( $\det A = 0$ ). Условие разрешимости системы (30) имеет вид:

$$\left( \mathbf{I}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right)_1 = 0. \quad (31)$$

Это уравнение совместно с уравнением (24) позволяет однозначно определить  $\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}$  через  $\mathbf{I}^{(0)}$ :

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(0)} = \frac{1}{\|\mathbf{I}^{(0)}\|} \sqrt{\frac{2\tilde{S}^{(0)}}{z_1 z_2}} \mathbf{I}^{(0)} \quad (32)$$

Рассмотрим теперь уравнение (34). В этом уравнении нужно заменить выражение  $\tilde{S}^{(1)} - z_1 z_2 \left( \tilde{\mathbf{E}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right)$ , для этого воспользуемся равенством (27).

Умножим его скалярно на  $\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}$ , тогда получим равенство:

$$-z_1 z_2 \left( \tilde{S}^{(1)} - z_1 z_2 \left( \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} \right) \right) \left( \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right) = \left( \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \mathbf{I}^{(0)} \right). \quad \text{Откуда следует}$$

$$\tilde{S}^{(1)} - z_1 z_2 \left( \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} \right) = -\frac{\left( \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \mathbf{I}^{(0)} \right)}{z_1 z_2 \left( \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right)} \quad \text{или с учетом (32) получаем:}$$

$$\tilde{S}^{(1)} - z_1 z_2 (\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(1)}) = -\frac{1}{2\tilde{S}^{(0)}} \sqrt{\frac{2\tilde{S}^{(0)}}{z_1 z_2}} \|\mathbf{I}^{(0)}\| \quad (33)$$

С учетом (32) и (33) уравнение для  $\eta^{(0)}$  запишется в виде:

$$\Delta \eta^{(0)} = \frac{\sqrt{-\tilde{S}^{(0)}}}{\|\mathbf{I}^{(0)}\|} \lambda \left( \nabla \left( \frac{1}{\sqrt{-\tilde{S}^{(0)}}} \|\mathbf{I}^{(0)}\| \right), \mathbf{I}^{(0)} \right) \quad \text{или} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \left( (1-\lambda) \left( \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \eta^{(0)}}{\partial x^2} + \left( \left( \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + (1-\lambda) \left( \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \eta^{(0)}}{\partial y^2} - \\ & - 2\lambda \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta^{(0)}}{\partial x \partial y} = -\frac{\lambda \|\nabla \eta^{(0)}\|^2}{2\tilde{S}^{(0)}} (\nabla \eta^{(0)}, \nabla \tilde{S}^{(0)}) \end{aligned} \quad (35)$$

Уравнение (35) при  $\lambda = 1$  является уравнением параболического типа, при  $\lambda < 1$  – уравнением гиперболического типа, при  $\lambda > 1$  – уравнением эллиптического типа.

Теперь система уравнений для начального приближения может быть решена последовательно: сначала решается уравнение (25), затем (35), а  $\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}$  вычисляется по формуле (32).

Найдем первое приближение, для этого рассмотрим систему уравнений (27). Уравнение (27) не позволяет однозначно находить  $\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}$ . Найдем условие разрешимости из следующего приближения (23), которое с учетом условия (24) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(2)}) \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} = \frac{1}{z_1^2 z_2^2} \mathbf{I}^{(1)} + \frac{1}{z_1 z_2} \tilde{S}^{(1)} \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} - (\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(1)}) \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} + \\ & + \frac{1}{z_1 z_2} \tilde{S}^{(2)} \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} - \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}\|^2 \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \end{aligned} \quad (36)$$

С учетом (29), получаем (37), где (38) - условие разрешимости (37).

$$A \tilde{\mathbf{E}}^{(2)} = \frac{1}{z_1^2 z_2^2} \mathbf{I}^{(1)} + \frac{1}{z_1 z_2} \tilde{S}^{(1)} \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} - (\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(1)}) \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} + \frac{1}{z_1 z_2} \tilde{S}^{(2)} \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} - \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}\|^2 \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \quad (37)$$

$$\frac{1}{z_1^2 z_2^2} (\mathbf{I}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) + \frac{1}{z_1 z_2} \tilde{S}^{(1)} (\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) - (\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(1)}) (\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) = 0, \quad (38)$$

Причем (38) после некоторых преобразований может быть записана в виде:

$(\mathbf{I}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)})_1 - (\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}, \mathbf{I}^{(0)})_1 = 0$ . Это уравнение совместно с уравнением (27)

позволяет однозначно определить  $\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}$  через  $\mathbf{I}^{(1)}$ :

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(1)} = \mathbf{B}\mathbf{I}^{(1)} + \mathbf{C}, \quad \text{где} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{(\mathbf{I}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)})} \begin{pmatrix} \tilde{E}_2^{(0)}\tilde{E}_2^{(0)} & -\tilde{E}_1^{(0)}\tilde{E}_2^{(0)} \\ -\tilde{E}_1^{(0)}\tilde{E}_2^{(0)} & \tilde{E}_1^{(0)}\tilde{E}_1^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{z_1 z_2 (\mathbf{I}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)})} \left( \tilde{S}^{(1)} + \frac{\|\mathbf{I}^{(0)}\|}{\sqrt{2\tilde{S}^{(0)}} \sqrt{z_1 z_2}} \right) \mathbf{I}^{(0)} \quad (40)$$

Уравнение (22) с учетом (24), (33) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Delta\eta^{(1)} = & -z_1 z_2 \lambda \left( \nabla \left( -\frac{1}{2\tilde{S}^{(0)}} \sqrt{\frac{2\tilde{S}^{(0)}}{z_1 z_2}} \|\mathbf{I}^{(0)}\| \right), \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} \right)_1 - \\ & - z_1 z_2 \lambda \left( \nabla \left( \tilde{S}^{(2)} - \frac{z_1 z_2}{2} \left( 2(\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(2)}) + \|\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}\|^2 \right) \right), \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right)_1 \end{aligned} \quad (41)$$

В этом уравнении нужно заменить выражение

$\tilde{S}^{(2)} - \frac{z_1 z_2}{2} \left( 2(\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(2)}) + \|\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}\|^2 \right)$ , для этого воспользуемся равенством (36).

Умножим его скалярно на  $\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}$ , тогда получим равенство:

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{S}^{(2)} - z_1 z_2 (\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(2)}) - \frac{z_1 z_2}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}\|^2 \right) (\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) = \\ & = -\frac{1}{z_1 z_2} (\mathbf{I}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) - (\tilde{S}^{(1)} \tilde{\mathbf{E}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) + z_1 z_2 (\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(1)}) (\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) \text{ или} \\ & \tilde{S}^{(2)} - z_1 z_2 (\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(2)}) - \frac{z_1 z_2}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}\|^2 = \\ & = -\frac{1}{z_1 z_2 \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} (\mathbf{I}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) - \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} (\tilde{S}^{(1)} - z_1 z_2 (\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(1)})) (\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) \end{aligned}$$

С учетом формулы (33), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{(2)} - z_1 z_2 (\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(2)}) - \frac{z_1 z_2}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}\|^2 = & -\frac{1}{z_1 z_2 \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} (\mathbf{I}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) + \\ & + \frac{\|\mathbf{I}^{(0)}\|}{z_1 z_2 \sqrt{2\tilde{S}^{(0)}} \sqrt{z_1 z_2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} \tilde{S}^{(1)} + \frac{\|\mathbf{I}^{(0)}\|^2}{2z_1^2 z_2^2 \tilde{S}^{(0)} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} \end{aligned} \quad (42)$$

Подставим полученное равенство в (41), тогда

$$\Delta\eta^{(1)} = \sqrt{-z_1 z_2} \lambda \left( \nabla \left( \frac{1}{\sqrt{-2\tilde{S}^{(0)}}} \|\mathbf{I}^{(0)}\| \right) \tilde{\mathbf{E}}^{(1)} \right) -$$

$$- \lambda \left( \nabla \left( -\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} (\mathbf{I}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) + \frac{1}{2\tilde{S}^{(0)}} \sqrt{\frac{2\tilde{S}^{(0)}}{z_1 z_2}} \frac{\|\mathbf{I}^{(0)}\|}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} \tilde{S}^{(1)} + \frac{1}{2\tilde{S}^{(0)} z_1 z_2} \frac{\|\mathbf{I}^{(0)}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} \right) \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right)$$

С учетом (39), (40), получим (43).

$$\Delta\eta^{(1)} = \sqrt{-z_1 z_2} \lambda \left( \nabla \left( \frac{1}{\sqrt{-2\tilde{S}^{(0)}}} \|\mathbf{I}^{(0)}\| \right) \mathbf{B}\mathbf{I}^{(1)} + \mathbf{C} \right) -$$

$$- \lambda \left( \nabla \left( -\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} (\mathbf{I}^{(1)}, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) + \frac{1}{2\tilde{S}^{(0)}} \sqrt{\frac{2\tilde{S}^{(0)}}{z_1 z_2}} \frac{\|\mathbf{I}^{(0)}\|}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} \tilde{S}^{(1)} + \frac{1}{2\tilde{S}^{(0)} z_1 z_2} \frac{\|\mathbf{I}^{(0)}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} \right) \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right) \text{ или (43)}$$

$$\left( (\tilde{E}_1^{(0)})^2 + (1-\lambda)(\tilde{E}_2^{(0)})^2 \right) \frac{\partial^2 \eta^{(1)}}{\partial x^2} + \left( (1-\lambda)(\tilde{E}_1^{(0)})^2 + (\tilde{E}_2^{(0)})^2 \right) \frac{\partial^2 \eta^{(1)}}{\partial y^2} +$$

$$+ 2\lambda \tilde{E}_1^{(0)} \tilde{E}_2^{(0)} \frac{\partial^2 \eta^{(1)}}{\partial x \partial y} = (\nabla \eta^{(1)}, \mathbf{r}) + F(\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \mathbf{I}^{(0)}, \tilde{S}^{(0)}), \text{ где (44)}$$

$$F(\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \mathbf{I}^{(0)}, \tilde{S}^{(0)}) = \lambda \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 \left( \nabla \left( \sqrt{\frac{z_1 z_2}{2\tilde{S}^{(0)}}} \|\mathbf{I}^{(0)}\| \right) \mathbf{C} \right) -$$

$$- \lambda \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 \left( \nabla \left( \frac{1}{2\tilde{S}^{(0)}} \sqrt{\frac{2\tilde{S}^{(0)}}{z_1 z_2}} \frac{\|\mathbf{I}^{(0)}\|}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} \tilde{S}^{(1)} + \frac{1}{2\tilde{S}^{(0)} z_1 z_2} \frac{\|\mathbf{I}^{(0)}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} \right) \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right)$$

$$\mathbf{r} b = \mathbf{r}(\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}) = \lambda \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 b_0 + \lambda \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 \tilde{E}_2^{(0)} b_1 - \lambda \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 \tilde{E}_1^{(0)} b_2,$$

$$\mathbf{r} b_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tilde{E}_2^{(0)}}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\tilde{E}_1^{(0)}}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} \end{pmatrix}, \mathbf{r} b_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tilde{E}_2^{(0)}}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\tilde{E}_1^{(0)}}{\|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2} \end{pmatrix}, \mathbf{r} b_0 = B^T \nabla \left( \sqrt{\frac{z_1 z_2}{2\tilde{S}^{(0)}}} \|\mathbf{I}^{(0)}\| \right).$$

$$\frac{\partial \tilde{S}^{(1)}}{\partial t} = \lambda \Delta \tilde{S}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2z_1 z_2}} \operatorname{div} \left( \frac{\|\mathbf{I}^{(0)}\|}{\sqrt{\tilde{S}^{(0)}}} \mathbf{V} \right) \text{ (45)}$$

Уравнение для  $\tilde{S}^{(1)}$  с учетом (24) примет вид (45).

Таким образом, для нахождения первого приближения необходимо решить систему уравнений (45), (39), (44). Причем, тип уравнения (47) аналогичен типу уравнения (35).

#### 4. Промежуточные слои

Из асимптотических решений, приведенных выше, следует, что они не могут быть справедливыми в окрестности  $\tilde{S} = 0$ , т.е. в некоторых областях (промежуточных слоях):  $-\delta(\epsilon) \leq \tilde{S} \leq \delta(\epsilon)$ , причем  $\delta(\epsilon) \rightarrow 0$ , при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Для построения асимптотического разложения в этих областях воспользуемся малостью функции  $\tilde{S}$ , тогда для нулевого приближения получим систему уравнений:

$$z_1^2 z_2^2 \frac{\epsilon}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} = \mathbf{I}^{(0)} \tag{46}$$

$$\Delta \eta^{(0)} = z_1^2 z_2^2 \frac{\epsilon}{2} \lambda \left( \nabla \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2, \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \right) \tag{47}$$

Из уравнения (46) следует, что  $\tilde{\mathbf{E}}^{(0)} = \alpha \mathbf{I}^{(0)}$ , где  $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{z_1^2 z_2^2 \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{I}^{(0)}\|^2}}$  (48)

Таким образом, формула (48) примет вид:  $\tilde{\mathbf{E}}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt[3]{z_1^2 z_2^2 \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{I}^{(0)}\|^2}} \mathbf{I}^{(0)}$  (49)

Уравнение (47) с учетом (48) после ряда преобразований приводится к (50)

$$\begin{aligned} & \left( (1-\lambda) \left( \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \eta^{(0)}}{\partial x^2} - 2\lambda \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \eta^{(0)}}{\partial x \partial y} + \\ & + \left( \left( \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + (1-\lambda) \left( \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \eta^{(0)}}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \tag{50}$$

Полученное уравнение при  $\lambda \in [0;1]$  является квазилинейным уравнением параболического типа, а при  $\lambda \in (1;+\infty)$  – эллиптического типа. Из условия сращивания решений из области электронейтральности и

промежуточного слоя, а также из области пространственного заряда и промежуточного слоя следует, что  $\delta(\epsilon) = \delta_0 \epsilon^{\frac{1}{3}} + \delta_1 \epsilon^{\frac{2}{3}} + \dots$ , где  $d_0, d_1, \dots$  некоторые постоянные.

### 5. Вычисление граничных условий

Подставляя асимптотические разложения в области пространственного заряда (16) в краевые условия (4), (5), (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\epsilon$ , получаем краевые условия для уравнений первого приближения:

$$\tilde{S}_0|_{x=0} = A_0(y), \quad \tilde{S}_0|_{x=1} = A_1(y), \quad \tilde{S}_0|_{y=0} = B_0(x), \quad \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial y}|_{y=L} = B_1(x), \quad (51)$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial x}|_{x=0} = Q_0(y), \quad \frac{\partial \eta_0}{\partial x}|_{x=x_k} = Q_1(y), \quad \eta_0|_{y=0} = 0, \quad \eta_0|_{y=L} = -i_{av}L, \quad (52)$$

$$\tilde{S}_0|_{t=0} = K_0(x, y), \quad \eta_0|_{t=0} = M_0(x, y), \quad (53)$$

Для следующих приближений получает однородные граничные условия.

### 6. Алгоритм численного решения начального приближения

Используя, предложенное выше асимптотического решение для численного решения краевой задачи (1)-(6) предлагается следующий алгоритм.

1. Объединяя уравнения для функции  $\tilde{S}^{(0)}$  в области электронейтральности, промежуточного слоя и области пространственного заряда, получаем, что эта функция удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial \tilde{S}^{(0)}}{\partial t} = \begin{cases} \lambda \Delta \tilde{S}^{(0)} - \text{div}(\tilde{S}^{(0)} \mathbf{V}), & \tilde{S} \geq 0, \\ \lambda \Delta \tilde{S}^{(0)}, & \tilde{S} < 0. \end{cases}, \text{ или } \frac{\partial \tilde{S}^{(0)}}{\partial t} = \lambda \Delta \tilde{S}^{(0)} - \chi(\tilde{S}^{(0)}) \text{div}(\tilde{S}^{(0)} \mathbf{V}),$$

где  $\chi$  функция Хэвисайда [4]. Уравнение для функции  $\tilde{S}^{(0)}$  не зависит от неизвестных функций  $\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}$  и  $\eta^{(0)}$ . Решая это уравнение вместе с краевыми условиями (51) и (53) однозначно определяем функцию  $\tilde{S}^{(0)}$ . Для численного решения использовалась неявная разностная схема.

2. Для численного нахождения функции  $\eta^{(0)}$ , вводится в рассмотрение дифференциальный оператор  $L(\eta^{(0)})$ , который определяется следующим образом:

$$L(\eta^{(0)}) = \begin{cases} \Delta\eta^{(0)} - \frac{\lambda}{\tilde{S}^{(0)}} (\nabla\tilde{S}^{(0)}, \nabla\eta^{(0)}), \text{ при } \tilde{S}^{(0)} > \delta(\varepsilon), \\ \left( (1-\lambda) \left( \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2\eta^{(0)}}{\partial x^2} - 2\lambda \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial^2\eta^{(0)}}{\partial x\partial y} + \\ + \left( \left( \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + (1-\lambda) \left( \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2\eta^{(0)}}{\partial y^2}, \text{ при } -\delta(\varepsilon) \leq \tilde{S}^{(0)} \leq \delta(\varepsilon), \\ \left( (1-\lambda) \left( \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2\eta^{(0)}}{\partial x^2} - 2\lambda \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial^2\eta^{(0)}}{\partial x\partial y} + \\ + \left( \left( \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + (1-\lambda) \left( \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2\eta^{(0)}}{\partial y^2} - \frac{\lambda \|\nabla\eta^{(0)}\|^2}{2\tilde{S}^{(0)}} (\nabla\eta^{(0)}, \nabla\tilde{S}^{(0)}), \text{ при } \tilde{S}^{(0)} < -\delta(\varepsilon). \end{cases}$$

Решая уравнение:  $L(\eta^{(0)}, S^{(0)}) = 0$ ,  $t > 0, x \in (0,1), y \in (0,L)$  вместе с краевыми условиями (52), (53) однозначно находим функцию  $\eta^{(0)}$ . Для численного решения этой краевой задачи использовались метод установления и явная разностная схема.

3. Плотность тока находится по формуле  $\mathbf{I}^{(0)} = \left( -\frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial y}, \frac{\partial\eta^{(0)}}{\partial x} \right)$ .

4. Напряженность электрического поля вычисляем по формуле:

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(0)} = \begin{cases} -\frac{1}{z_1 z_2 \tilde{S}^{(0)}} \mathbf{I}^{(0)}, \text{ при } \tilde{S}^{(0)} > \delta(\varepsilon), \\ \frac{1}{\sqrt[3]{z_1^2 z_2^2 \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{I}^{(0)}\|^2}} \mathbf{I}^{(0)}, \text{ при } -\delta(\varepsilon) \leq \tilde{S}^{(0)} \leq \delta(\varepsilon), \\ \frac{1}{\|\mathbf{I}^{(0)}\|} \sqrt{\frac{2\tilde{S}^{(0)}}{z_1 z_2}} \mathbf{I}^{(0)}, \text{ при } \tilde{S}^{(0)} < -\delta(\varepsilon). \end{cases} \quad (54)$$

5. Для нахождения концентраций  $C_1^{(0)}$  и  $C_2^{(0)}$  решаем систему алгебраических уравнений, состоящую из уравнения обобщенной общей

«концентрации»  $C_1^{(0)} + C_2^{(0)} = \tilde{S}^{(0)} + \frac{\varepsilon}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2$  и уравнения Пуассона [1]

$z_1 C_1^{(0)} + z_2 C_2^{(0)} = \varepsilon \operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}$  и получаем:

$$\begin{cases} C_1^{(0)} = \frac{z_2}{z_2 - z_1} \left( \tilde{S}^{(0)} + \frac{\varepsilon}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 \right) - \frac{\varepsilon}{z_2 - z_1} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}, \\ C_2^{(0)} = \frac{\varepsilon}{z_2 - z_1} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}}^{(0)} - \frac{z_1}{z_2 - z_1} \left( \tilde{S}^{(0)} + \frac{\varepsilon}{2} \|\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}\|^2 \right) \end{cases}$$

На основе данного алгоритма численного решение был разработан комплекс программ [5] для численного анализа краевой задачи (1)-(6).

На рис. 2 приведены графики решений краевой задачи для функции обобщенной концентрации  $\tilde{S}^{(0)}$  и плотности тока  $I^{(0)}$ .

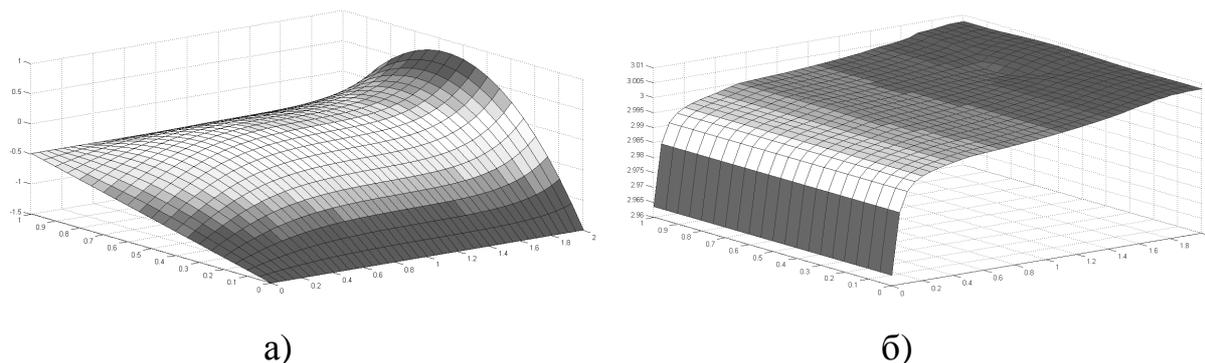


Рис. 2. Графики решений краевой задачи: а)  $\tilde{S}(\bar{t}, x, y)$ , б)  $I_1(\bar{t}, x, y)$  при некотором  $\bar{t}$ .

### Заключение

1. Численное решение исходной краевой задачи (1)-(6) при значениях малого параметра  $\varepsilon$  меньше  $10^{-3}$  встречает большие сложности, поскольку она относится к классу жестких задач. В то же время реально  $\varepsilon$  меняется в пределах от  $10^{-6}$  до  $10^{-14}$ . Предлагаемый выше алгоритм численного решения, основанный на асимптотическом приближении первого порядка, позволяет провести численный анализ краевой задачи при произвольно малых значениях параметра  $\varepsilon$ .

2. Если функции  $A_0, A_1, B_0, B_1, Q_0, Q_1, K_0, M_0$  зависят от  $\varepsilon$  и имеют

асимптотическое разложение согласующееся с (4)-(6), то алгоритм асимптотического решения сохраняется с небольшими видоизменениями. Метод асимптотического решения, предложенный выше, может быть обобщен и на более общие, чем (4)-(6), краевые условия.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чубырь Н.О., Коваленко А.В., Уртенев М.Х. Двумерные математические модели переноса бинарного электролита в мембранных системах (численный и асимптотический анализ): монография – Краснодар: ФГБОУ ВПО «КубГТУ», 2012. –132с.
2. Коваленко А.В., Уртенев М.Х., Узденова А.М., Чубырь Н.О., Хромых А.А., Барсукова В.Ю. Анализ краевой задачи модели переноса бинарного электролита в приближении закона Ома// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета, №77(03), 2012 года <http://ej.kubagro.ru/2012/03/pdf/57.pdf>.
3. Коваленко А.В., Уртенев М.Х., Узденова А.М., Чубырь Н.О., Хромых А.А., Барсукова В.Ю. Численное решение краевой задачи модели переноса бинарного электролита в приближении закона Ома// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета, №77(03), 2012 года <http://ej.kubagro.ru/2012/03/pdf/58.pdf>.
4. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 228 с.
5. Коваленко А.В., Чубырь Н.О., Хромых А.А., Узденова А.М., Уртенев М.Х. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программный комплекс для моделирования процессов переноса в мембранных системах в двумерном случае» № 2012613903 от 26 апреля 2012.

#### REFERENCES

1. Chubyr' N.O., Kovalenko A.V., Urtenov M.H. Dvumernye matematicheskie modeli perenosa binarnogo jelektrolita v membrannyh sistemah (chislennyj i asimptoticheskij analiz): monografija – Krasnodar: FGBOU VPO «KubGTU», 2012. –132s.
2. Kovalenko A.V., Urtenov M.H., Uzdenova A.M., Chubyr' N.O., Hromyh A.A., Barsukova V.Ju. Analiz kraevoj zadachi modeli perenosa binarnogo jelektrolita v priblizhenii zakona Oma// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta, №77(03), 2012 goda <http://ej.kubagro.ru/2012/03/pdf/57.pdf>.
3. Kovalenko A.V., Urtenov M.H., Uzdenova A.M., Chubyr' N.O., Hromyh A.A., Barsukova V.Ju. Chislennoe reshenie kraevoj zadachi modeli perenosa binarnogo jelektrolita v priblizhenii zakona Oma// Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta, №77(03), 2012 goda <http://ej.kubagro.ru/2012/03/pdf/58.pdf>.
4. Volkov I.K., Kanatnikov A.N. Integral'nye preobrazovanija i operacionnoe ischislenie: Ucheb. dlja vuzov / Pod red. V.S. Zarubina, A.P. Krishhenko. – 2-e izd. – М.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2002. – 228 s.
5. Kovalenko A.V., Chubyr' N.O., Hromyh A.A., Uzdenova A.M., Urtenov M.H. Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlja JeVM «Programmnyj kompleks <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/35.pdf>

dlja modelirovanija processov perenosa v membrannyh sistemah v dvumernom sluchae» № 2012613903 ot 26 aprelja 2012.