

УДК 51-73:54.128

UDC 51-71:54.128

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА БИНАРНОГО ЭЛЕКТРОЛИТА В ПРИБЛИЖЕНИИ ЗАКОНА ОМА **NUMERICAL SOLUTION TRANSPORT MODEL BINARY ELECTROLYTE IN APPROXIMATION OF OHM'S LAW**

Коваленко Анна Владимировна
к.э.н., доцент кафедры прикладной математики

Kovalenko Anna Vladimirovna
Cand.Econ.Sci., assistant professor

Уртенов Махамет Хусеевич
д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики

Urtenov Mahamet Khuseevich
Dr.Sci.Phys.-Math., professor

Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Kuban State University, Krasnodar, Russia

Чубырь Наталья Олеговна
старший преподаватель кафедры прикладной математики

Chubyr Natalia Olegovna
senior teacher of chair of applied mathematics

Хромых Анна Александровна
старший преподаватель кафедры прикладной математики

Khromikh Anna Aleksandrovna
senior teacher of chair of applied mathematics

Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия

Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

Узденова Аминат Магомедовна
аспирантка кафедры математического анализа

Uzdenova Aminat Machametovna
postgraduate student of faculty of the mathematical analysis

Карачаево-Черкесский государственный университет, Карачаевск, Россия

Karachaevo-Circassian state university, Karachaevsk, Russia

Барсукова Виктория Юрьевна
к.ф.-м.н., доцент кафедры дифференциальных и интегральных уравнений

Barsukova Victoria Jurevna
Cand.Phys.-Math.Sci., assistant professor

Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Kuban State University, Krasnodar, Russia

Коваленко Анна Владимировна
к.э.н., доцент кафедры прикладной математики

Kovalenko Anna Vladimirovna
Cand.Econ.Sci., assistant professor

Статья посвящена численному решению краевой задачи модели переноса бинарного электролита в мембранных системах в приближении закона Ома. Предлагаются различные численные методы решения. Установлены основные закономерности переноса

The article is devoted to the numerical solution of boundary value problem of the binary electrolyte model of transport in membrane systems in the approximation of Ohm's law. Different numerical methods are offered. The main regularities of transfer are established

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НЕРНСТА - ПЛАНКА И ПУАССОНА, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Keywords: MATHEMATICAL MODELING, SYSTEM NERNST - PLANCK AND POISSON EQUATIONS, NUMERICAL METHODS

Введение

В работе [1] нами было найдено асимптотическое представление решения краевой задачи модели переноса бинарного электролита в мембранных системах в приближении закона Ома. Показано, что канал обессоливания $(x, y) \in [0, H] \times [0, L]$, при каждом фиксированном t разбивается на различные области $[0, H] \times [0, L] = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, которые определяются знаком функции обобщенной концентрации $S(t, x, y)$: электронейтральности U_1 ($S(t, x, y) > 0$), пространственного заряда U_2 ($S(t, x, y) < 0$), промежуточного слоя U_3 (окрестность нулей функции $S(t, x, y)$) и асимптотика решения имеет разный вид в различных областях. При «мягких» (допредельных) токовых режимах области U_2 и U_3 , значительно меньше области электронейтральности U_1 . При жестких (запредельных) режимах область пространственного заряда U_2 является уже макроскопической и сопоставимой с областью электронейтральности U_1 , но промежуточный слой остается значительно меньшей, чем эти области. Система уравнений с частными производными, описывающая асимптотическое представление решения в каждой из областей меняет свой тип и в них встречаются члены, зависящие от знака искомой функции. Данная статья посвящена разработке метода численного решения таких краевых задач.

1 Краевая задача асимптотического представления решения

1.1 Система уравнений

Асимптотическое представление решения краевой задачи модели переноса бинарного электролита в мембранных системах в приближении закона Ома описывается следующей системой уравнений в безразмерных переменных [1]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = I \Delta S - c(S) \operatorname{div}(S \vec{V})$$

$$t > 0, x \in (0,1), y \in (0,L)$$

(1)

$$\Delta \eta = \frac{1}{S} (\operatorname{grad} \tilde{S}, \operatorname{grad} h), (x, y) \in U_1 = \{(x, y) : S(t, x, y) \geq d_1 > 0\}$$

(2)

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = - \frac{\|\operatorname{grad} h\|^2}{2\tilde{S}} (\operatorname{grad} S, \operatorname{grad} h)$$

(3)

$$(x, y) \in U_2 = \{(x, y) : S(t, x, y) \leq d_2 < 0\}$$

$$\left(\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 4\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

(4)

$$(x, y) \in U_3 = \{(x, y) : d_2 \leq S(t, x, y) \leq d_1\}, \text{ где } c(x) - \text{ функция Хэвисайда [2]:}$$

$$c(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Определим дифференциальный оператор:

$$L(h, S) = \begin{cases} \Delta \eta - \frac{1}{S} (\nabla S, \nabla h), & (x, y) \in U_1 \\ \left(\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 4\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \\ + \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, & (x, y) \in U_3 \\ \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \\ + \frac{\|\nabla h\|^2}{2\tilde{S}} (\nabla S, \nabla h), & (x, y) \in U_2 \end{cases}$$

Тогда система уравнений (1-4) запишется в виде

$$L(h, S) = 0 \quad t > 0, x \in (0,1), y \in (0, L) \quad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = I \Delta S - c(S) \operatorname{div}(S \vec{V}) \quad t > 0, x \in (0,1), y \in (0, L)$$

(6)

Будем искать стационарное решение системы уравнений (5), (6). Поскольку оператор $L(h, S)$ меняет свой тип, то удобно находить стационарное решение системы уравнений (5), (6) методом установления:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = I \Delta S - c(S) \operatorname{div}(S \vec{V})$$

(7)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = L(h, S) \quad (8)$$

1.2 Краевые условия

Система уравнений должна быть дополнена краевыми условиями. Мембранные системы работают, как правило, в двух разных режимах потенциостатическом, когда поддерживается постоянным падение потенциала в цепи и гальваностатическом, когда ток i_{av} , протекающий через любое сечение камеры обессоливания, является постоянным.

Постановка краевых условий зависит от моделируемого режима работы электродиализного аппарата.

Как показано в [3] при гальваностатическом режиме естественными являются следующие краевые условия.

1) Граничные условия

$$\begin{aligned} S|_{x=0} &= A(t, y) < 0, & S|_{x=1} &= B(t, y) < 0, \\ S|_{y=0} &= C(t, x), & S|_{y=L} &= D(t, x) \end{aligned}$$

(9)

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=1} = 0$$

$$h|_{y=0} = 0 \qquad h|_{y=L} = -i_{av}L$$

2) Начальное условие

$$S|_{t=0} = S_0(x, y), \quad h|_{t=0} = h_0(x, y) \qquad (10)$$

3) Условия согласования граничных условий:

$$\begin{aligned} C(t,0) &= A(t,0); & C(t,1) &= B(t,0); \\ D(t,0) &= A(t,L); & D(t,1) &= B(t,L) \end{aligned}$$

(11)

4) Условия согласования граничных и начальных условий:

$$\begin{aligned} S_0(0, y) &= A(0, y); & S_0(1, y) &= B(0, y); \\ S_0(x, 0) &= C(0, x); & S_0(x, L) &= D(0, x) \end{aligned} \qquad (12)$$

Для функции h граничные условия и начальное условие будет согласовано, если взять $h_0(x, y)$, например, в виде $h_0(x, y) = -i_{av}y + ax$, где $a > 0$ мало, например $a = 0.01$.

2 Явный метод численного решения

2.1 Дискретизация области и уравнений

Область $U = \{(x, y, t) \in [0,1] \times [0, L] \times [0, \infty)\}$ разбивается с шагом h_x, h_y и по t с шагом $h_t = \tau$. Для простоты в дальнейшем рассматривается частный случай $h_x = h_y = h$ и, кроме того, будем использовать одинаковые обозначения для исходных функции и, соответствующих им, разностных функций.

Вводятся массивы четыре одномерных и шесть двумерных массива

соответствующей размерности $N = [\frac{1}{h}] + 1, M = [\frac{L}{h}] + 1$:

$$\begin{aligned} &A[M]; B[M]; C[N]; D[N]; S_0[N, M]; S_p[N, M]; S_n[N, M]; \\ &h_0[N, M]; h_p[N, M]; h_n[N, M]; \end{aligned}$$

При фиксированном t вычисляем массив $A[M]$ по формуле $A(j) = A(t, (j-1)h)$, $j = 1, M$. Аналогично вычисляются массивы B, C, D, S_0 . Через S_p будем обозначать значения функции S на прошлом слое по t , а через S_n на текущем слое по времени.

Вычислим связь S_p , S_n и h_p , h_n из разностных уравнений для $i = 2, N-1; j = 2, M-1$ используя явную схему.

Для этого переходим от дифференциальных уравнений к разностным, заменяя производные конечными разностями по формулам:

$$\frac{\partial S}{\partial t} \approx \frac{S_n(i, j) - S_p(i, j)}{t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(SV_1) \approx \frac{S_p(i+1, j)V_1(i+1, j) - S_p(i, j)V_1(i, j)}{h},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(SV_2) \approx \frac{S_p(i, j+1)V_2(i, j+1) - S_p(i, j)V_2(i, j)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_p(i+1, j) - 2S_p(i, j) + S_p(i-1, j)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \approx \frac{S_p(i, j+1) - 2S_p(i, j) + S_p(i, j-1)}{h^2}.$$

Аналогично заменяются конечными разностями и производные от функции h : $\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$, причем:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \approx \frac{h_p(i+1, j+1) - h_p(i+1, j) - h_p(i, j+1) + h_p(i, j)}{h^2}$$

Подставим эти выражения в уравнения системы, тогда получим:

$$\frac{S_n(i, j) - S_p(i, j)}{t} = I \frac{S_p(i+1, j) - 2S_p(i, j) + S_p(i-1, j)}{h^2} +$$

$$I \frac{S_p(i, j+1) - 2S_p(i, j) + S_p(i, j-1)}{h^2} - c(S_p) \operatorname{div}_d(1/h, S_p),$$

$$\frac{h_p(i, j) - h_p(i, j)}{t} = \frac{h_p(i+1, j) - 2h_p(i, j) + h_p(i-1, j)}{h^2} +$$

$$\frac{h_p(i, j+1) - 2h_p(i, j) + h_p(i, j-1)}{h^2} - \frac{(S_p(i+1, j) - S_p(i, j))(h_p(i+1, j) - h_p(i, j))}{h^2 S_n(i, j)}$$

$$- \frac{(S_p(i, j+1) - S_p(i, j))(h_p(i, j+1) - h_p(i, j))}{h^2 S_n(i, j)}$$

если $S(i, j) \geq d_1$,

$$\frac{h_p(i, j) - h_p(i, j)}{t} = \left(\left(\frac{h_p(i, j+1) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 + 3 \left(\frac{h_p(i+1, j) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 \right).$$

$$\frac{h_p(i+1, j) - 2h_p(i, j) + h_p(i-1, j)}{h^2} - 4 \frac{(h_p(i+1, j) - h_p(i, j))(h_p(i, j+1) - h_p(i, j))}{h^2}.$$

$$\frac{h_p(i+1, j+1) - h_p(i+1, j) - h_p(i, j+1) + h_p(i, j)}{h^2} +$$

$$\left(\left(\frac{h_p(i+1, j) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 + 3 \left(\frac{h_p(i, j+1) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 \right).$$

$$\frac{h_p(i, j+1) - 2h_p(i, j) + h_p(i, j-1)}{h^2},$$

если $d_2 \leq S_n(i, j) < d_1$

$$\frac{h_p(i, j) - h_p(i, j)}{t} = \left(\frac{h_p(i, j+1) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 \cdot \frac{h_p(i+1, j) - 2h_p(i, j) + h_p(i-1, j)}{h^2}$$

$$- 2 \frac{(h_p(i+1, j) - h_p(i, j))(h_p(i, j+1) - h_p(i, j))}{h^2}.$$

$$\frac{h_p(i+1, j+1) - h_p(i+1, j) - h_p(i, j+1) + h_p(i, j)}{h^2} +$$

$$\left(\frac{h_p(i+1, j) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 \cdot \frac{h_p(i, j+1) - 2h_p(i, j) + h_p(i, j-1)}{h^2} +$$

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{h_p(i+1, j) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 + \left(\frac{h_p(i, j+1) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 \right).$$

$$\left[\frac{(S_n(i+1, j) - S_n(i, j))(h_p(i+1, j) - h_p(i, j))}{h^2 S_n(i, j)} + \frac{(S_n(i, j+1) - S_n(i, j))(h_p(i, j+1) - h_p(i, j))}{h^2 S_n(i, j)} \right],$$

$$S_n(i, j) < d_2, \quad i = 2, N - 1; j = 2, M - 1,$$

где $div_d(1/h, S_p)$ дискретный оператор дивергенции, который вычисляется

по формуле:

$$\operatorname{div}_d(1/h, S_p) = \frac{S_p(i+1, j)V_1(i+1, j) - S_p(i, j)V_1(i, j)}{h} +$$

$$+ \frac{S_p(i, j+1)V_2(i, j+1) - S_p(i, j)V_2(i, j)}{h}$$

$$i = 2, N - 1; j = 2, M - 1.$$

Разрешим эти уравнения относительно $S_n(i, j)$, тогда получим:

при $i = 2, N - 1; j = 2, M - 1$:

$$S_n(i, j) = S_p(i, j) + I \frac{t}{h^2} (S_p(i+1, j) - 2S_p(i, j) + S_p(i-1, j)) +$$

$$+ \frac{t}{h^2} (S_p(i, j+1) - 2S_p(i, j) + S_p(i, j-1)) - c(S_p) \operatorname{div}_d(t/h, S_p),$$

(13)

$$h_n(i, j) = h_p(i, j) + t \frac{h_p(i+1, j) - 2h_p(i, j) + h_p(i-1, j)}{h^2} +$$

$$t \frac{h_p(i, j+1) - 2h_p(i, j) + h_p(i, j-1)}{h^2} - t \frac{(S_p(i+1, j) - S_p(i, j))(h_p(i+1, j) - h_p(i, j))}{h^2 S_n(i, j)} -$$

$$- t \frac{(S_p(i, j+1) - S_p(i, j))(h_p(i, j+1) - h_p(i, j))}{h^2 S_n(i, j)}$$

если

$$S(i, j) \geq d_1$$

(14)

$$h_n(i, j) = h_p(i, j) + t \left(\left(\frac{h_p(i, j+1) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 + 3 \left(\frac{h_p(i+1, j) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 \right).$$

$$\frac{h_p(i+1, j) - 2h_p(i, j) + h_p(i-1, j)}{h^2} - 4t \frac{(h_p(i+1, j) - h_p(i, j))(h_p(i, j+1) - h_p(i, j))}{h^2}.$$

$$\frac{h_p(i+1, j+1) - h_p(i+1, j) - h_p(i, j+1) + h_p(i, j)}{h^2} +$$

$$t \left(\left(\frac{h_p(i+1, j) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 + 3 \left(\frac{h_p(i, j+1) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 \right).$$

$$\frac{h_p(i, j+1) - 2h_p(i, j) + h_p(i, j-1)}{h^2},$$

если $d_2 \leq S_n(i, j) \leq d_1$

(15)

$$\begin{aligned}
 h_n(i, j) = & h_p(i, j) + t \left(\frac{h_p(i, j+1) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 \cdot \frac{h_p(i+1, j) - 2h_p(i, j) + h_p(i-1, j)}{h^2} \\
 & - 2t \frac{(h_p(i+1, j) - h_p(i, j))(h_p(i, j+1) - h_p(i, j))}{h^2} + \\
 & \frac{h_p(i+1, j+1) - h_p(i+1, j) - h_p(i, j+1) + h_p(i, j)}{h^2} + \\
 & t \left(\frac{h_p(i+1, j) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 \cdot \frac{h_p(i, j+1) - 2h_p(i, j) + h_p(i, j-1)}{h^2} + \\
 & \frac{1}{2} t \left[\left(\frac{h_p(i+1, j) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 + \left(\frac{h_p(i, j+1) - h_p(i, j)}{h} \right)^2 \right] \cdot \\
 & \left[\frac{(S_n(i+1, j) - S_n(i, j))(h_p(i+1, j) - h_p(i, j))}{h^2 S_n(i, j)} + \frac{(S_n(i, j+1) - S_n(i, j))(h_p(i, j+1) - h_p(i, j))}{h^2 S_n(i, j)} \right],
 \end{aligned}$$

если

$$S_n(i, j) \leq d_2$$

(16)

Выше используется формула

$$c(S_p) \operatorname{div}_d(S_p) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_p(i, j) \leq 0 \\ \frac{t}{h} (S_p(i+1, j)V_1(i+1, j) - S_p(i, j)V_1(i, j)) + \\ + \frac{t}{h} (S_p(i, j+1)V_2(i, j+1) - S_p(i, j)V_2(i, j)), & S_p(i, j) > 0 \end{cases}$$

Присваивание значений на границах

$$\begin{aligned}
 S_n(1, j) = A(j), j = 1, M, \quad S_n(N, j) = B(j), j = 1, M \\
 S_n(i, 1) = C(i), i = 1, N, \quad S_n(i, M) = D(i), i = 1, N
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$h_n(1, j) = h_n(2, j), j = 1, M, \quad h_n(N, j) = h_n(N-1, j), j = 1, M$$

$$h_n(i, 1) = 0, i = 1, N, \quad h_n(i, M) = -i_{av}L, i = 1, N$$

2.2 Алгоритм численного решения

1 шаг. $t = 0$, присвоение начальных значений

$$S_p(i, j) = S_0(i, j), \text{ где } S_0(i, j) = S_0((i-1)h, (j-1)h).$$

$$h_p(i, j) = h_0(i, j), \quad \text{где}$$

$$h_0(i, j) = h_0((i-1)h, (j-1)h) = -i_{av}(j-1)h + a(i-1)h$$

2 шаг. $t = t + \tau$, переход на следующий слой

a) Рассчитывается $S_n(i, j), h_n(i, j)$ по формулам (13) – (16), при $i = 2, N-1; j = 2, M-1$.

b) Рассчитывается массивы $A[M]; B[M]; C[N]; D[N]$ по формулам:

$$A(j) = A(t, (j-1)h), j = 1, M,$$

$$B(j) = B(t, (j-1)h), j = 1, M,$$

$$C(i) = C(t, (i-1)h), i = 1, N,$$

$$D(i) = D(t, (i-1)h), i = 1, N$$

c) Рассчитываются $S_n(1, j), S_n(N, j), S_n(i, 1), S_n(i, M),$

$h_n(1, j), h_n(N, j), h_n(i, 1), h_n(i, M)$ по формулам (17)

d) Выводим графики $S_n(i, j), h_n(i, j)$

3 шаг. Проверка достижения заданного конечного времени t_k

Если $t < t_k$, то $S_p(i, j) = S_n(i, j), h_p(i, j) = h_n(i, j) i = 1, N; j = 1, M$, и

переход к шагу 2, иначе выход из алгоритма.

3 Различные обобщения

3.1 Полуявная схема

Основная идея полуявного метода заключается в замене производные $\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}(SV_1), \frac{\partial}{\partial y}(SV_2)$ конечными разностями по тем же

формулам, что и выше, но производные $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$ заменим конечными

разностями с использованием значений сеточной функции S_n на текущем слое, т.е.:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_n(i+1, j) - 2S_n(i, j) + S_n(i-1, j)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \approx \frac{S_n(i, j+1) - 2S_n(i, j) + S_n(i, j-1)}{h^2}$$

После подстановки в уравнение (7), получится система линейных уравнений для $S_n(i, j)$, которую можно решать, например, с помощью продольно-поперечной прогонки [4]. При этом для решения уравнения (8) используется явная схема.

3.2 Неявная схема. Метод итераций

Если все производные заменить конечными разностями на текущем слое, то получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно S_n, h_n . Часть уравнений относительно S_n являются «квазилинейными» алгебраическими уравнениями вида:

$$WS_n + c(QS_n)(GS_n) = 0, \tag{18}$$

где W, Q, G некоторые известные матрицы, причем функция Хэвисайда применяется к матрице покомпонентно. Для решения уравнения (18) можно использовать следующий метод итераций:

$$WS_n^{(k+1)} + c(QS_n^{(k)})(GS_n^{(k)}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{19}$$

Уравнения (19) можно решать, например, продольно-поперечной прогонкой, причем в качестве начального приближения можно рассматривать значения функции S на предыдущем слое, т.е. $S_n^{(0)} = S_p$.

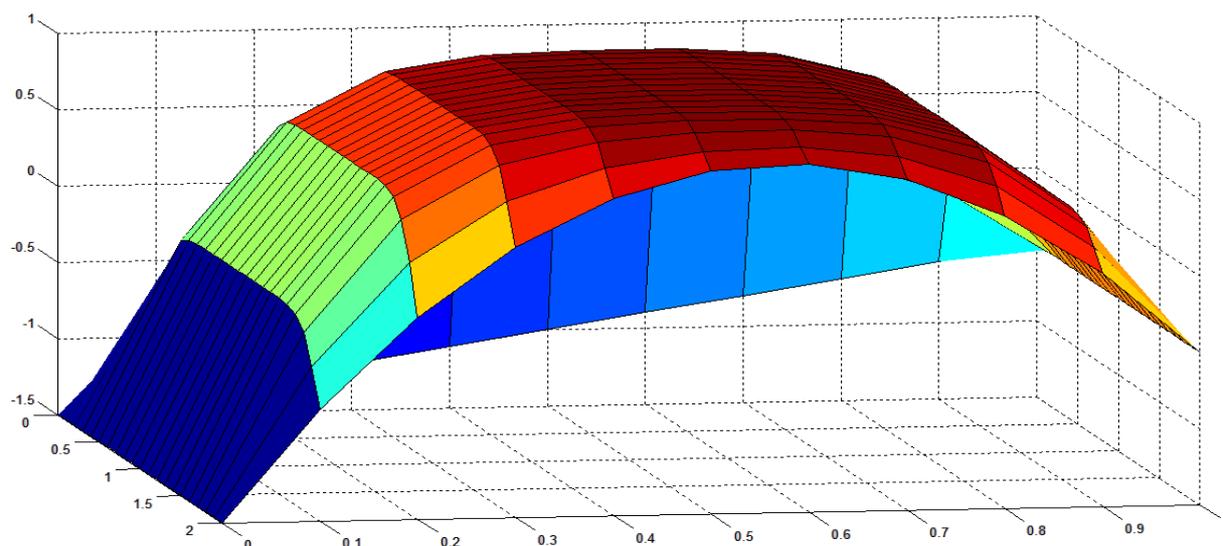
Основная проблема возникает при решении уравнений для h_n , поскольку в разных областях эти уравнения аппроксимируют дифференциальные операторы эллиптического и параболического типа.

4 Некоторые результаты численного решения

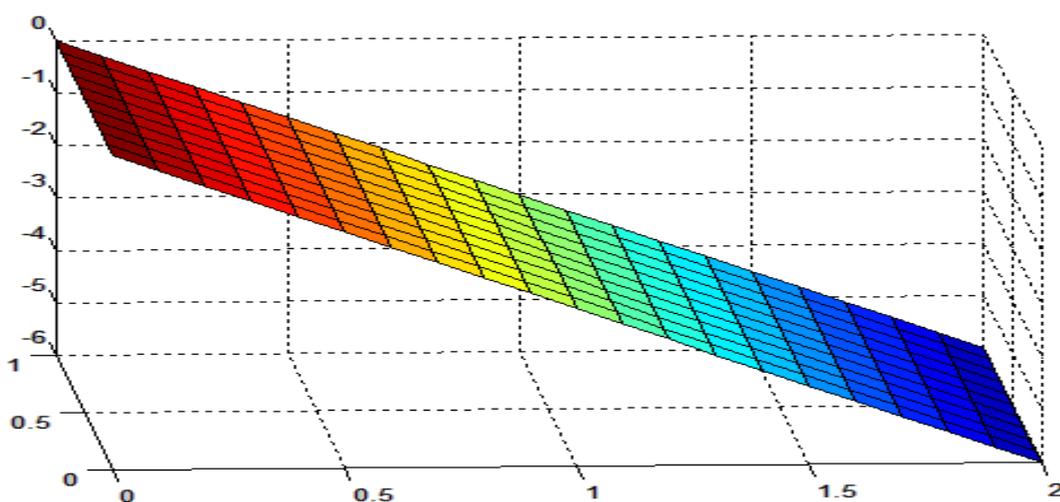
Ниже приводятся решения уравнений при следующих данных:

$$l = 1, \quad i_{av} = 3, \quad d_1 = -d_2 = 0.1,$$

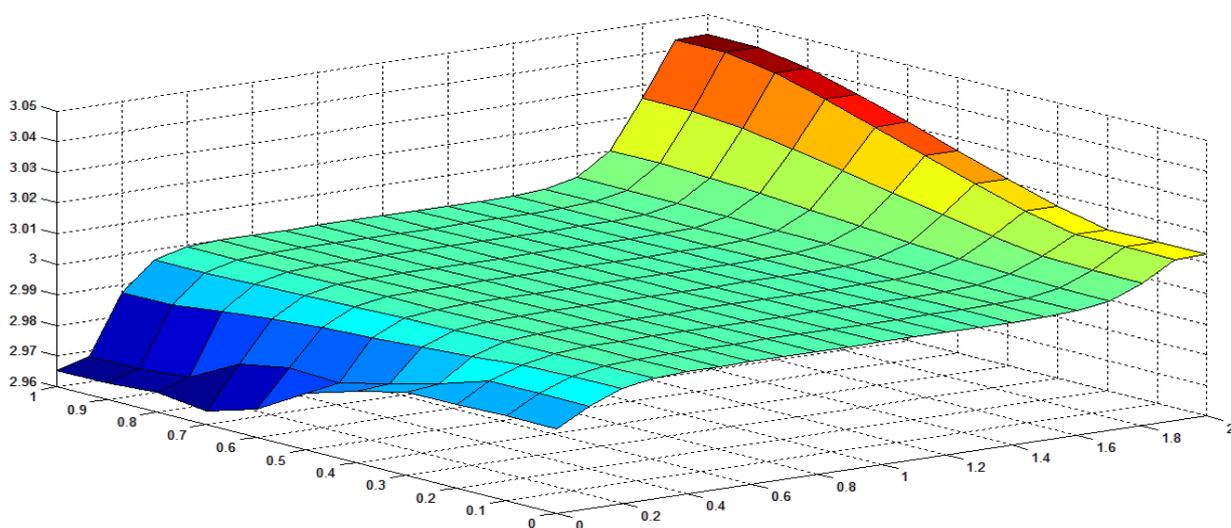
$$A = -1.5, \quad B = -0.5, \quad C = -7x^2 + 8x - 1.5, \quad D = x - 1.5$$



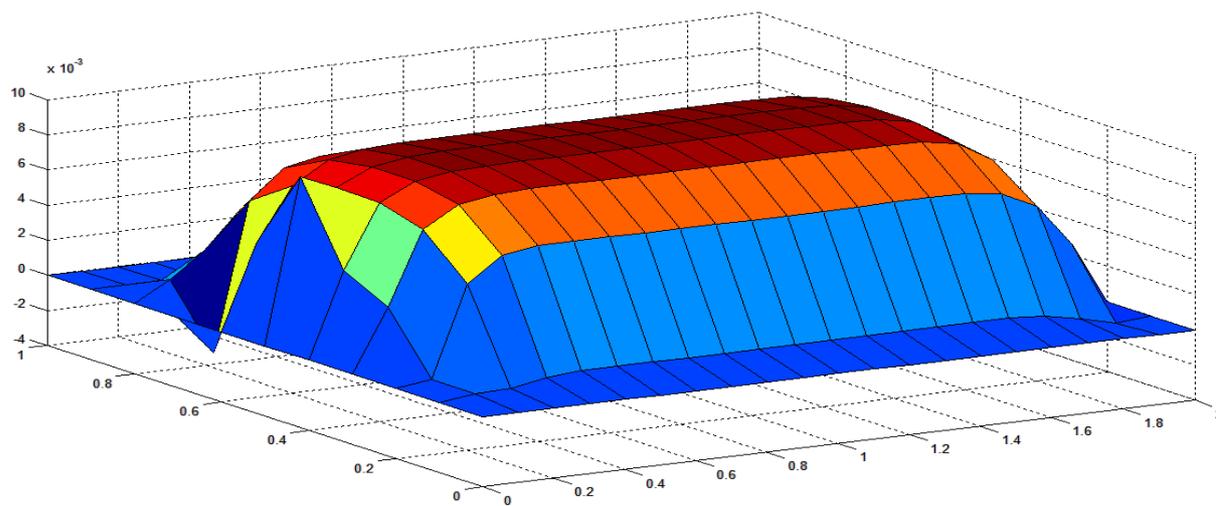
a)



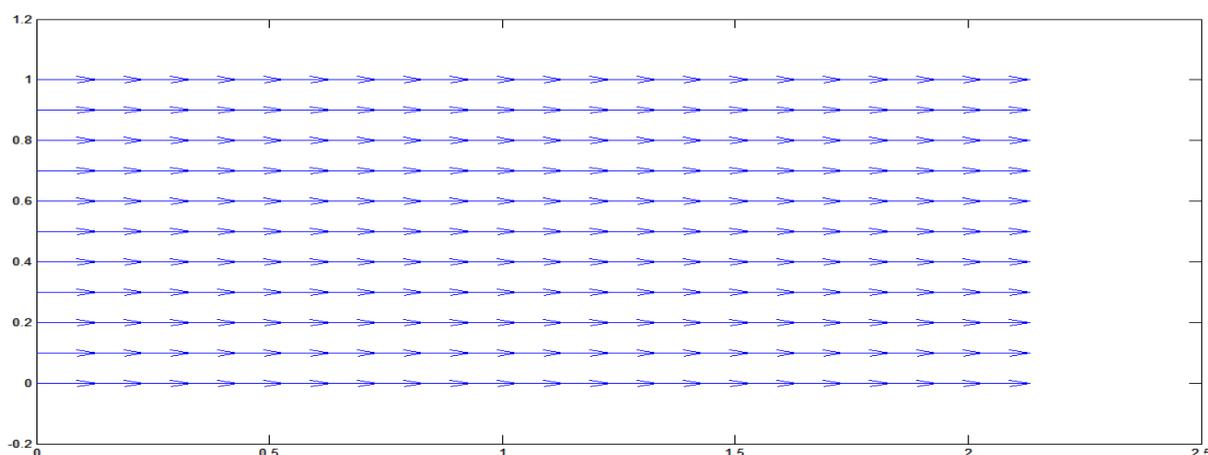
b)



c)



d)



e)

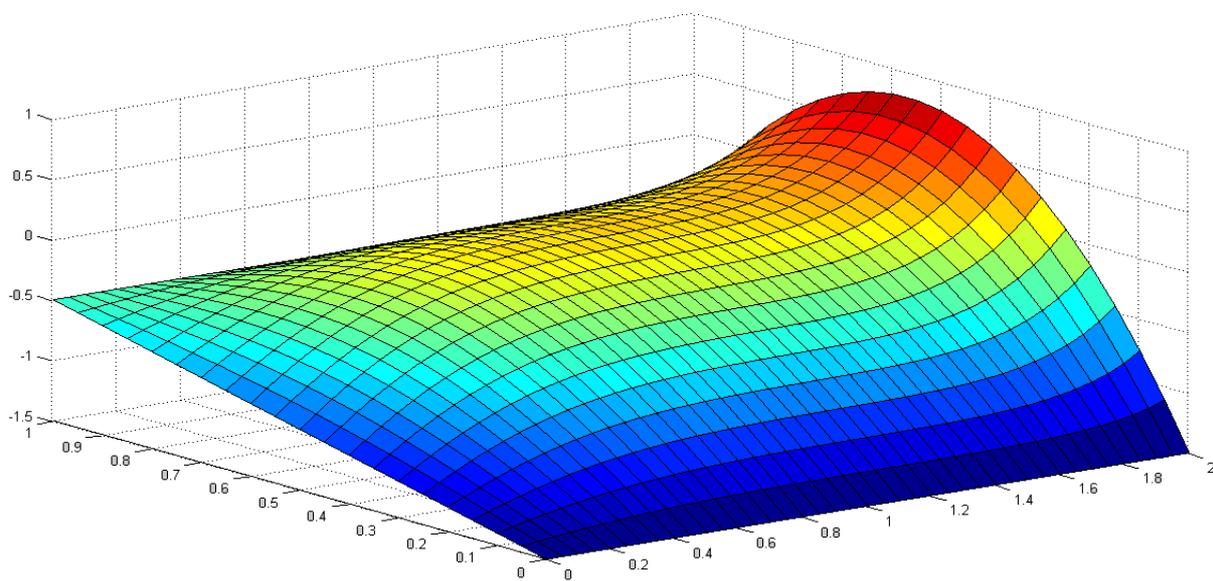
Рисунок 1 - Графики решений краевой задачи при $\bar{t} = 0.01$: а) – $S(\bar{t}, x, y)$, б) - $h(\bar{t}, x, y)$, в) - $I_1(\bar{t}, x, y)$, д) - $I_2(\bar{t}, x, y)$, е) – векторное поле плотности тока $\dot{I}(\bar{t}, x, y)$, $h_x = h_y = h = 0.1$, $t_1 = 0.00000001$, $t = 0.0001$

Из рис. 1 следует, что в средней части канала имеется «плато» с практически постоянным значением обобщенной концентрации, равным начальному условию (рис.1а). Это «плато» с увеличением времени постепенно размывается. Вблизи анионообменных и катионообменной мембран распределение обобщенной концентрации практически линейное. Функция h при фиксированном времени является практически линейным

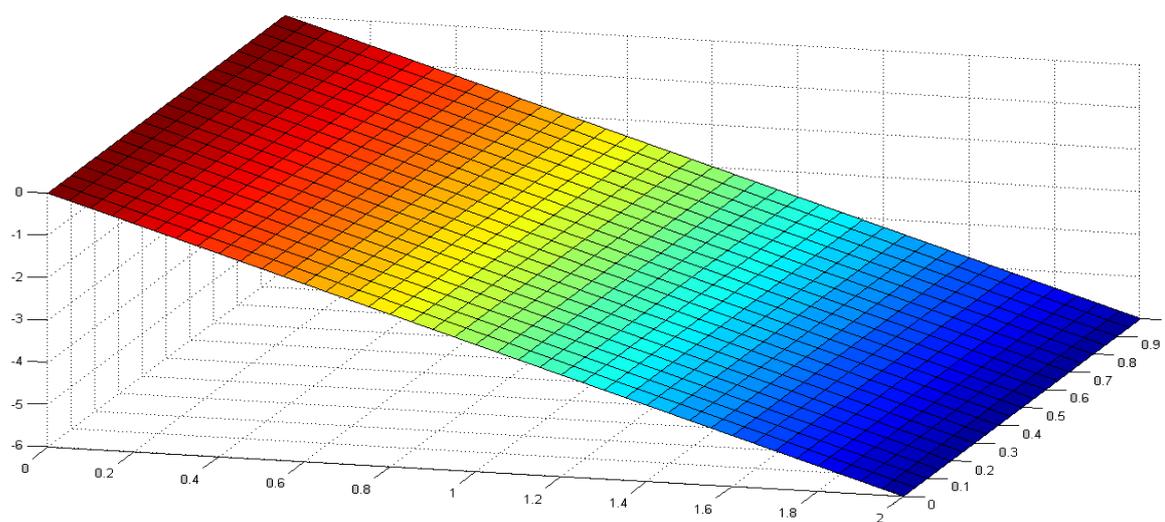
(рис.1b) по переменным (x, y) . Из (рис.1с,d,e) следует, что поле плотности тока практически перпендикулярно поверхности мембран.

Для повышения точности расчетов и оценки численной устойчивости уменьшим шаг h в два раза с 0.1 до 0.05. Сравнение результатов показывает достаточно хорошую точность расчетов и их численную устойчивость.

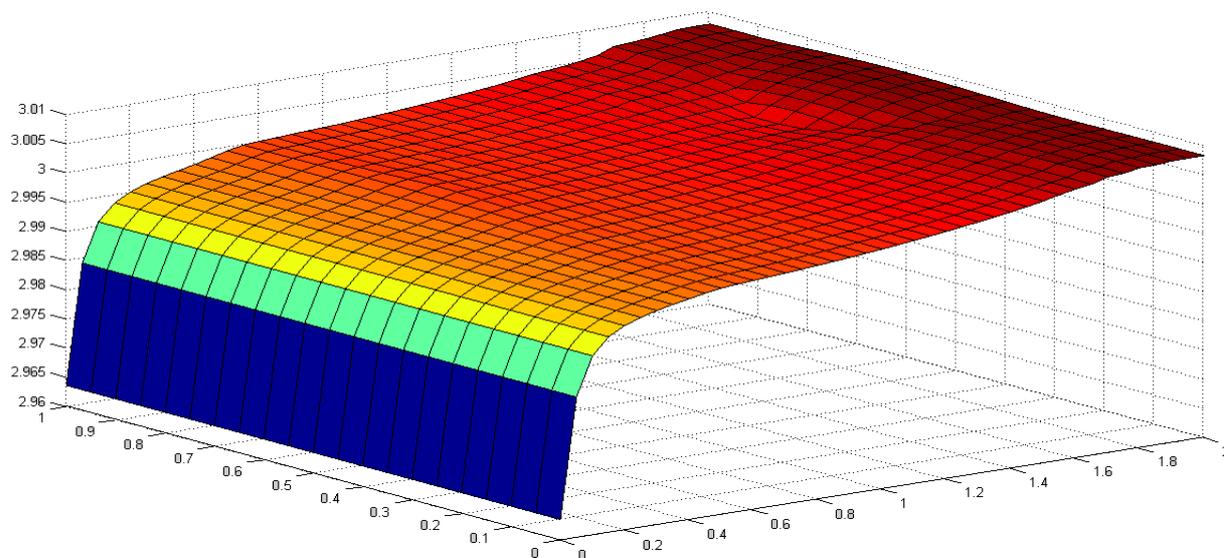
С увеличением времени значения обобщенной концентрации уменьшаются, при этом сохраняются указанные выше закономерности (см. рис.2а-е).



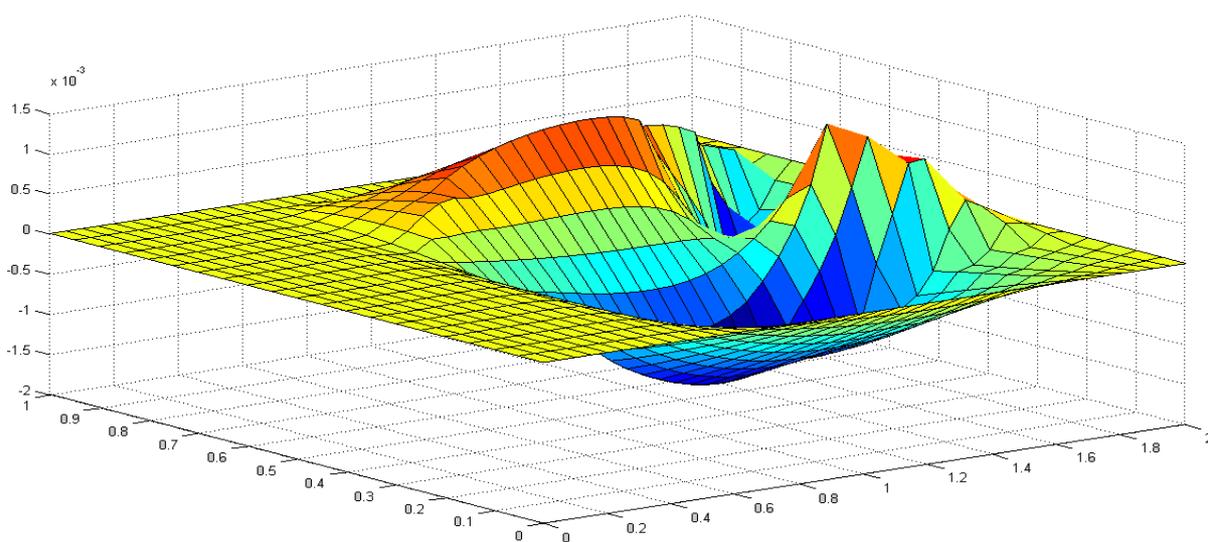
а)



b)



c)



d)

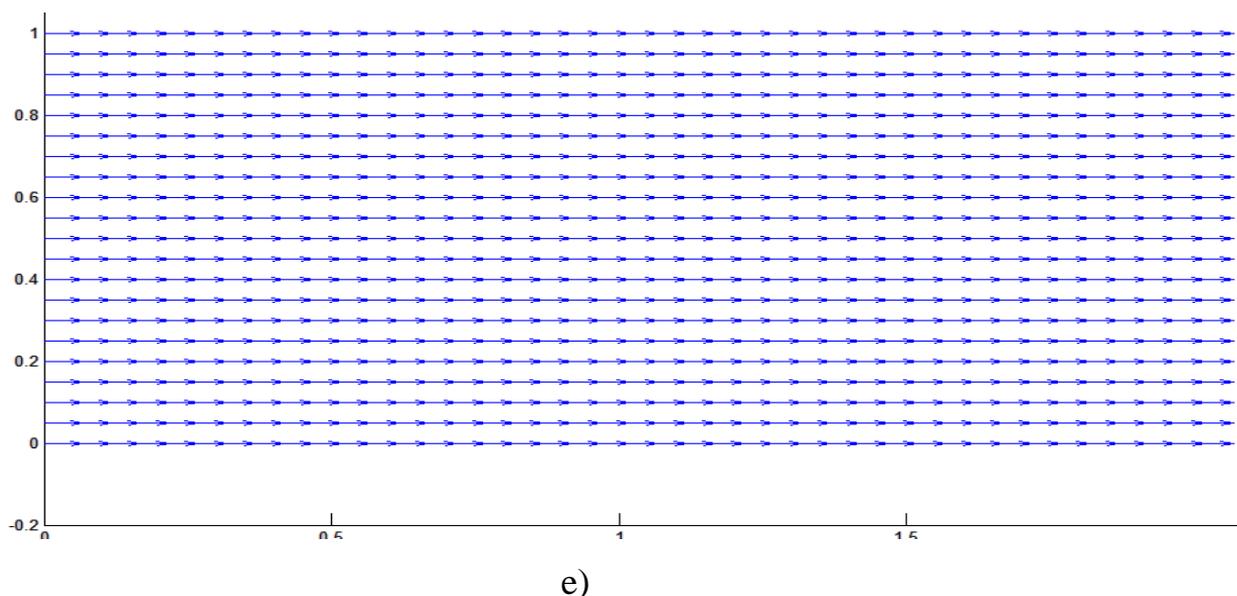


Рисунок 2 – Графики решений краевой задачи при $\bar{t} = 0.1$: а) – $S(\bar{t}, x, y)$, б) – $h(\bar{t}, x, y)$, в) – $I_1(\bar{t}, x, y)$, г) – $I_2(\bar{t}, x, y)$, е) – векторное поле плотности тока $\dot{I}(\bar{t}, x, y)$, $h_x = h_y = h = 0.05$, $t_1 = 0.00000001$, $t = 0.0001$

Результаты проведенного выше исследования позволяют сделать следующие выводы:

1) Предложен эффективный метод численного решения краевой задачи модели переноса бинарного электролита в мембранных системах в приближении закона Ома.

2) Установлены основные закономерности переноса, среди которых необходимо особо отметить вывод, что поле плотности тока практически перпендикулярно поверхности мембран. Это позволяет построить различные приближенные аналитические решения.

Литература

- 1 Уртенев К.М. Математическое моделирование тепломассопереноса в электродиализных аппаратах водоподготовки / К.М. Уртенев, А.В. Коваленко, Т.Л. Шапошникова – М.: Финансы и статистика, 2010. — 214с.
- 2 Волков И.К. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов / И.К. Волков, А.Н. Канатников, В.С. Зарубина, А.П. Крищенко — 2-е изд. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 228 с.
- 3 Узденова А.М. Математические модели электроконвекции в электромембранных системах/ Узденова А.М., Коваленко А.В., Уртенев М.Х. — Карачаевск: КЧГУ, 2011. — 154с.
- 4 Самарский А.А. Численные методы/ А.А. Самарский, А.В. Гулин, - М.: Наука, 1989.