УДК 330.42:519.816

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА РЫНКЕ ЦЕННЫХ БУМАГ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Семенчин Евгений Андреевич
д. ф.-м. н., профессор

Денисенко Андрей Олегович
аспирант
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

В статье дан обзор методов оптимизации портфеля ценных бумаг. Раскрыто содержание портфеля ценных бумаг

Ключевые слова: ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ, ПОРТФЕЛЬ ЦЕННЫХ БУМАГ, РЫНОК ЦЕННЫХ БУМАГ, КРИТЕРИИ ОПТИМИЗАЦИИ, МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

UDC 330.42:519.816

MULTICRITERIA MATHEMATICAL MODELS OF DECISION-MAKING ON THE SECURITIES MARKET IN THE CONDITIONS OF UNCERTAINTY

Semenchin Evgeniy Andreevich
Dr.Sci.(Phys.-Math.), professor

Denisenko Andrey Olegovich
post-graduate student
Kuban State University, Krasnodar, Russia

The article provides the review of optimization methods of the securities portfolio. The contents of the securities portfolio is described

Keywords: OPTIMIZATION OF PORTFOLIO OF SECURITIES, PORTFOLIO OF SECURITIES, SECURITIES MARKET, CRITERIA OF OPTIMIZATION, OPTIMIZATION MODEL OF PORTFOLIO OF SECURITIES

Оптимизация портфеля инвестиций является одной из распространенных, типичных и значимых финансовых задач, которая возникает в практике ресурсного обеспечения, страхования, инвестирования, банковского дела. Решение ее позволяет найти наиболее эффективный способ вложения инвестором своего капитала в акции нескольких компаний. Основными принципами формирования инвестиционного портфеля являются надежность и доходность вложений, их стабильный рост и высокая ликвидность.

Целью оптимизации портфеля ценных бумаг является формирование такого портфеля ценных бумаг, который бы соответствовал требованиям инвестора, предприятия, как по доходности, так и по возможному риску, что достигается путем распределением ценных бумаг в портфеле.

При инвестировании ценных бумаг инвестор формирует портфель этих бумаг и использует для этого наиболее известные и апробированные на практике модели: Марковица, Шарпа, Тобина и другие. Математические модели всех портфелей в значительной степени похожи друг на друга: имеется критерий, который необходимо оптимизировать (как правило, минимизировать) по некоторым входящим в него параметрам, на которые наложены определенные ограничения. Некоторые из них (как предлагается в данной работе) можно выбрать в качестве новых критериев. В этом случае будем иметь многокритериальную задачу оптимизации (с двумя и более критериями). Также задачи можно исследовать методами свертки критериев или путем построения Парето-оптимальных точек. Существует несколько методов свертки критериев [2]: методы линейной, лексико – графической, мультипликативной свертки, метод выбор главного критерия, метод идеальной точки. В данной работе при использовании задач будем использовать линейную свертку критериев.

1. Многокритериальная оптимизация состава портфеля ценных бумаг Шарпа

Модель портфеля Шарпа рассматривает взаимосвязь доходности каждой ценной бумаги с доходностью рынка в целом.

Основные допущения, которые предполагаются выполненными при построении модели Шарпа:

- в качестве доходности ценной бумаги принимается математическое ожидание доходности;

- существует некая безрисковая ставка доходности R_f, т. е. доходность некой ценной бумаги, риск которой всегда минимален по сравнению с другими ценными бумагами (под риском ценной бумаги понимается степень зависимости изменений доходности ценной бумаги от изменений доходности рынка в целом);

- взаимосвязь отклонений доходности ценной бумаги от безрисковой ставки доходности описывается функцией линейной регрессии;

- данные о составе портфеля в прошлые периоды времени, используемые при расчете его доходности и риска, в полной мере отражают будущие значения доходности.

Математическая модель портфеля ценных бумаг Шарпа имеет вид [3]:

$$\begin{cases} R_f + \sum_{i=1}^{N}(a_i \cdot W_i) + (R_m + R_f) \cdot \sum_{i=1}^{N}(b_i \cdot W_i) \to \max_{W}, \quad W = (W_1,...,W_n), \\ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}(b_i \cdot W_i)\right)^2 \cdot s_m^2 + \sum_{i=1}^{N}\left(s_{ri}^2 \cdot W_i^2\right)} \le s_{reg}, \\ W_i \ge 0, \\ \sum_{i=1}^{N} W_i = 1. \end{cases} \tag{1}$$

где a_i, W_i, b_i, s_{ri} - соответственно избыточная доходность, вес, риск, остаточный риск, R_f – доходность ценных бумаг, R_m – ожидаемая доходность рынка в целом, s_m – среднее квадратическое отклонение доходности рынка, s_{reg} - максимально допустимая величина риска портфеля ценных бумаг.

В модели (1) предполагается, что величина s_{reg} заранее задана (например, экспертом).

Перейдем от модели (1) к модели, представляющую собой задачу двухкритериальной оптимизации:

$$\begin{cases} R_f + \sum_{i=1}^{N}(a_i \cdot W_i) + (R_m + R_f) \cdot \sum_{i-1}^{N}(b_i \cdot W_i) \to \max_{W}, \quad W = (W_1,...,W_n), \\ \sum_{i=1}^{N}(b_i \cdot W_i)^2 \cdot s_m{}^2 + \sum_{i=1}^{N}(s_{ri}^2 \cdot W_i^2) \to \min_{W}, \\ W_i \ge 0, \\ \sum_{i=1}^{N} W_i = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Как показывают вычислительные эксперименты модель (2) позволяет с большей выгодой сформировать состав портфеля. От модели

(2) с двумя критериями можно перейти (путем линейной свертки критериев [2]) к модели с одним критерием

$$C_1 \cdot (R_f + \sum_{i=1}^{N}(a_i \cdot W_i) + (R_m + R_f) \cdot \sum_{i-1}^{N}(b_i \cdot W_i)) -$$
$$- C_2 \cdot (\sum_{i=1}^{N}(b_i \cdot W_i)^2 \cdot s_m{}^2 + \sum_{i=1}^{N}(s_{ri}^2 \cdot W_i^2)) \to \max_W \quad (3)$$

и теми же ограничениями, что и в (2):

$$W_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N} W_i = 1, \quad (4)$$

где $C_1 = const \geq 0,\ C_2 = const \geq 0$, $C_1 + C_2 = 1$, отражают предпочтение одного критерия по сравнению с другим и определяются экспертами.

Модель (3),(4) может быть исследована методами квадратичного программирования.

Пример 1. Согласно статистическим данным, приведенным в [3], можно рассчитать основные параметры модели (2): $n = 6$, $R_f = 4$, $a_1 = -7{,}04$, $a_2 = -10{,}58$, $a_3 = -6{,}17$, $a_4 = -0{,}35$, $a_5 = -6{,}46$, $a_6 = 0{,}33$, $s_m = 8$, $b_1 = 2{,}833$, $b_2 = 5{,}913$, $b_3 = 2{,}672$, $b_4 = 0{,}130$, $b_5 = 3{,}353$, $b_6 = 1{,}568$, $R_m = 3{,}5$, $s_{r1} = 11{,}89$, $s_{r2} = 14{,}34$, $s_{r3} = 11{,}37$, $s_{r4} = 5{,}55$, $s_{r5} = 12{,}65$, $s_{r6} = 15{,}95$.

Эксперты предлагают выбрать в (3) значения $C_1 = 0{,}7,\ C_2 = 0{,}3.$

Воспользовавшись офисным приложением электронных таблиц Excel, найдем решение модели (3) (табл. 1).

Таблица 1 - Результаты расчета веса каждой ценной бумаги в портфеле

Ценная бумага	Вес в ценной бумаги
W_1	0,25

W_2	0,02
W_3	0,08
W_4	0,54
W_5	0,06
W_6	0,05

При этом максимально средняя эффективность состава портфеля при минимальном риске $\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}(b_i \cdot W_i)\right)^2 \cdot s_m^2 + \sum_{i=1}^{N}\left(s_{ri}^2 \cdot W_i^2\right)} = 4{,}96$.

Если в модели (2), наоборот $C_1 = 0{,}3,\ C_2 = 0{,}7$, то имеем (табл.2).

Таблица 2 - Результаты расчета веса каждой ценной бумаги в портфеле

Ценная бумага	Вес в ценной бумаги
W_1	0,12
W_2	0,03
W_3	0,10
W_4	0,63
W_5	0,07
W_6	0,06

При этом максимально средняя эффективность состава портфеля при минимальном риске $\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}(b_i \cdot W_i)\right)^2 \cdot s_m^2 + \sum_{i=1}^{N}\left(s_{ri}^2 \cdot W_i^2\right)} = 4{,}41$.

2. Многокритериальная оптимизация состава портфеля ценных бумаг Марковица

Модель оптимизации портфеля Марковица основана на том экспериментальном факте, что показатели доходности различных ценных бумаг взаимосвязаны (коррелируют между собой): с ростом доходности одних бумаг наблюдается одновременный рост ее по другим бумагам, по третьим остается без изменения, а по четвертым она, наоборот, снижается.

Такая зависимость не является детерминированной, т.е. однозначно определенной, а является стохастической.

При построении модели Марковица предполагается выполненными следующие основные допущения:

- в качестве доходности ценной бумаги принимается математическое ожидание доходности;

- в качестве риска ценной бумаги принимается среднее квадратическое отклонение доходности;

- данные прошлых периодов, используемые при расчете доходности и риска, в полной мере отражают ее будущие значения;

- степень и характер взаимосвязи между ценными бумагами выражается коэффициентом линейной корреляции.

Математическая модель портфеля ценных бумаг Марковица имеет вид [1]:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} q_i q_j b_{ij} \to \min, & b_{ij} = \operatorname{cov}(R_i, R_j), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1, & \\ \sum\limits_{i=1}^{n} m_i q_i = m_p, & \\ q_1 \geq 0, \ldots, q_n \geq 0. & \end{array}\right\} \qquad (5)$$

где m_p - выбранное инвестором значение эффективности портфеля; q_i - доля i-ой ценной бумаги в портфеле; m_i- математическое ожидание, эффективности R_i i-ой ценной бумаги: $m_i = MR_i, i = 1,\ldots,n$. В модели (5) величина m_i предполагается заранее заданной (экспертом).

Перейдем от модели (5) к модели, представляющую собой задачу двухкритериальной оптимизации:

$$\left.\begin{array}{ll}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} q_i q_j b_{ij} \to \min\limits_{q}, & b_{ij} = \operatorname{cov}(R_i, R_j), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} m_i q_i \to \max\limits_{q}, & q = (q_1, \ldots, q_n), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1, & \\ q_1 \geq 0, \ldots, q_n \geq 0. & \end{array}\right\} \quad (6)$$

Как и ранее, методом линейной свертки критериев [2] от модели (6) с двумя критериями можно перейти к модели с одним критерием:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} q_i q_j b_{ij}\right) - a_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i q_i\right) \to \min\limits_{q}, \\ i, j = 1, \ldots, n, \qquad b_{ij} = \operatorname{cov}(R_i, R_j), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1, \\ q_1 \geq 0, \ldots, q_n \geq 0, \end{array}\right\} \quad (7)$$

где a_1, a_2, $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0,\ a_1 + a_2 = 1$, задаваемые экспертами константы, каждая из которых определяет степень значимости соответствующего ей критерия. Задача (7) представляет собой задачу квадратического программирования и может быть решена с помощью офисного приложения Excel.

Пример 2. Пусть в модели (7) n = 5; $m_1 = MR_1 = 1$, $m_2 = MR_2 = 2$, $m_3 = MR_3 = 3$, $m_4 = MR_4 = 4$, $m_5 = MR_5 = 5$; $s_1^2 = \operatorname{cov}(R_1, R_1) = 3$, $s_2^2 = \operatorname{cov}(R_2, R_2) = 2$, $s_3^2 = \operatorname{cov}(R_3, R_3) = 4$, $s_4^2 = \operatorname{cov}(R_4, R_4) = 4$, $s_5^2 = \operatorname{cov}(R_5, R_5) = 5$; $\operatorname{cov}(R_i, R_j) = 0,\ \ i \neq j;\ \ i, j = 1, \ldots, 5$; $a_1 = 0{,}7,\ a_2 = 0{,}3$.

Воспользовавшись офисным приложением Excel, найдем ее решение (табл.3).

Таблица 3 - Результаты решения модели (7)

Номер ценной бумаги	Доля i -ой бумаги в портфеле, $i = 1, \ldots, 5$

1	0,099
2	0,255
3	0,181
4	0,235
5	0,231

При этом максимальная средняя эффективность состава портфеля $\sum_{i=1}^{5} m_i q_i = 3{,}24$.

Если в модели (7), наоборот $a_1 = 0{,}3, a_2 = 0{,}7$, то имеем (табл.4).

Таблица 4 - Результаты решения модели (7)

Номер ценной бумаги	Доля i -ой бумаги в портфеле, $i = 1,...,5$
1	0,000
2	0,000
3	0,086
4	0,378
5	0,536

При этом средняя эффективность состава портфеля $\sum_{i=1}^{5} m_i q_i = 4{,}45$.

Таким образом, с изменением степени значимости критерия изменяется и максимальная средняя эффективность состава портфеля.

Рассмотренные выше модели различных портфелей ценных бумаг представляют собой однокритериальную задачу оптимизации. Однако при исследовании этих моделей целесообразно одновременно минимизировать риск и максимизировать доход. Такой подход приводит к исследованию двухкритериальной задачи нелинейного программирования, которая может быть решена одним из методов свертки критериев, в частности, линейной свертки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математические методы и модели исследования операций: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности 08.01.16 «Математические методы в экономике»

и другим экономическим специальностям / Под ред. В.А. Колемаев.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008.-592 с.
2. Перепелица, В.А. Теория игр и исследование операций/ В.А. Перепелица, В.Е. Попова, Е.А. Семенчин. – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2004.-182 с.
3.Разработка и анализ инвестиционных проектов// [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://exsolver.narod.ru/Books/Fininvest/Invest/index.html